ĐẶNG PHƯƠNG TRANG (*Chủ biên*)
PHAN VĂN ĐỨC - HỒNG TUẤN KHANH

KIẾN THỨC CƠ BẢN
TOÁN 7

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2008

LỜI NÓI ĐẦU

Để tạo điều kiện cho các em học sinh có thêm tài liệu tham khảo, học tập tốt môn toán lớp 7 chúng tôi biên soạn quyển **KIẾN THỨC CƠ BẢN TOÁN 7** theo nội dung chương trình Toán 7 năm 2003 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Sách gồm bảy chương, trong đó có bốn chương đại số và ba chương hình học. Mỗi chương được biên soạn theo cấu trúc như sau:

A. ***Kiến thức cơ bản cần nhớ:*** tóm tất kiến thức cơ bản của chương trình Toán 7 mà học sinh cần nắm vững.

B. ***Các bài toán:*** bao gồm những bài toán minh họa cho kiến thức cơ bản đã học, giúp cho học sinh nắm vững lý thuyết căn bản đã học để các em vận dụng vào thực hành giải toán.

C. ***Luyện tập:*** bao gồm một số bài tập có hướng dẫn, gợi ý hoặc đáp số để các em luyện tập thêm nhằm rèn luyện và nâng cao kĩ năng giải toán lớp 7.

Với nội dung trên, quyển sách này còn là tài liệu tham khảo bổ ích cho quí thầy, cô giáo, các bậc phụ huynh để hướng dẫn, giúp đỡ các em học tốt môn toán.

NHÓM BIÊN SOẠN

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

SỐ HỮU TỈ - SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Số hữu tỉ:

Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với a, b $\in$ Z, b $\neq$ 0.

Các phân số bằng nhau biểu diễn cùng một số hữu tỉ.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là Q.

2. So sánh các số hữu tỉ:

– Với hai số hữu tỉ bất kỳ x, y, ta luôn có hoặc x = y hoặc x < y hoặc x > y. Ta có thể so sánh hai số hữu tỉ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

– Nếu x < y thì trên trục số, điểm x ở bên trái điểm y.

– Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương;

Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm.

Số hữu tỉ 0 không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

B. Các bài toán

Bài 1 Điền các kí hiệu N, Z, Q vào ô trống cho hợp nghĩa (trong mỗi trường hợp xét khả năng có thể xảy ra).

a) $2002 \in \square$ c) $\frac{2003}{2002} \in \square$

b) $-2002 \in \square$ d) $-\frac{2000}{1997} \in \square$

Giải

a) Có ba khả năng:

$2002 \in \boxed{N}$; $2002 \in \boxed{Z}$; $2002 \in \boxed{Q}$;

b) Có hai khả năng:

$-2002 \in \boxed{Z}$; $-2002 \in \boxed{Q}$;

c) Chỉ có một khả năng: $\frac{2003}{2002} \in \boxed{Q}$;

d) Chỉ có một khả năng: $-\frac{2000}{1997} \in \boxed{Q}$;

Bài 2 Viết năm đại diện khác nhau của mỗi số hữu tỉ sau:

$x_1 = -4$; $x_2 = \frac{-4}{7}$; $x_3 = \frac{10}{3}$; $x_4 = \frac{8}{-15}$; $x_5 = \frac{-2}{-5}$

Giải

$$x_1 = \frac{-4}{1} = \frac{-8}{2} = \frac{8}{-2} = \frac{-12}{3} = \frac{12}{-3}$$

$$x_2 = \frac{-4}{7} = \frac{4}{-7} = \frac{-8}{14} = \frac{8}{-14} = \frac{-12}{21}$$

$$x_3 = \frac{10}{3} = \frac{-10}{-3} = \frac{20}{6} = \frac{-20}{-6} = \frac{30}{9}$$

$$x_4 = \frac{8}{-15} = \frac{-8}{15} = \frac{16}{-30} = \frac{-16}{30} = \frac{24}{-45}$$

$$x_5 = \frac{-2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{-4}{-10} = \frac{4}{10} = \frac{-6}{-15}$$

Bài 3 Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần:

$\frac{-1}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{-2}{5}$; $\frac{-7}{5}$; 0; $\frac{13}{5}$; -4; 2;

Giải

Ta có:

$\frac{-1}{10} = \frac{-2}{20}$; $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$; $\frac{-2}{5} = \frac{-8}{20}$;

$\frac{-7}{4} = \frac{-35}{20}$; $\frac{13}{5} = \frac{52}{20}$; $-4 = \frac{-80}{12}$; $2 = \frac{40}{10}$

Do đó $\frac{-80}{20} < \frac{-35}{20} < \frac{-8}{20} < \frac{-2}{20} < 0 < \frac{16}{20} < \frac{40}{20} < \frac{52}{20}$

Vậy $-4 < \frac{-7}{4} < \frac{-2}{5} < \frac{-1}{10} < 0 < \frac{4}{5} < 2 < \frac{13}{5}$

C. Luyện tập

Bài 1 Tìm câu đúng trong các câu sau đây:

a) Số 0 là số hữu tỉ dương.

b) Số nguyên âm không phải là số hữu tỉ âm.

c) Số hữu tỉ âm nhỏ hơn số tự nhiên.

d) Tập hợp Q gồm các số hữu tỉ dương và các số hữu tỉ âm.

Giải

a) Sai vì số 0 không là số hữu tỉ âm, không là số hữu tỉ dương.

b) Sai vì số nguyên âm chỉ là số hữu tỉ âm.

c) Đúng

d) Sai, vì còn thiếu số 0.

Vậy trong các câu a, b, c, d ta chọn câu c.

Bài 2 Cho số hữu tỉ $x = \frac{a-5}{3}$. Với giá trị nào của a thì:

a) x là số hữu tỉ dương;

b) x là số hữu tỉ âm;

c) x không là số hữu tỉ dương và cũng không là số hữu tỉ âm.

Hướng dẫn: x là số hữu tỉ dương, âm... tùy thuộc vào dấu của tử số:

a) $a > 5$ b) $a < 5$ c) $a = 5$

Bài 3 Cho các số hữu tỉ $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{-3}{8}$, $x_3 = 6$.

Viết các số x_1, x_2, x_3 dưới dạng phân số:

a) đều có tử là -12

b) có mẫu chung là 24

Giải

a) $x_1 = \frac{-12}{-18}$, $x_2 = \frac{-12}{32}$, $x_3 = \frac{-12}{-2}$

b) $x_1 = \frac{16}{24}$, $x_2 = \frac{-9}{4}$, $x_3 = \frac{144}{24}$

Bài 4 So sánh các số hữu tỉ sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{3}{4}$ và $\frac{15}{14}$ b) $\frac{-18}{173}$ và $\frac{1}{2003}$

c) $\frac{-7}{22}$ và $\frac{-3}{8}$ d) $\frac{2}{-7}$ và $\frac{4}{-9}$

Hướng dẫn:

a) $\frac{3}{4} < 1 < \frac{15}{14}$ b) $\frac{-18}{173} < 0 < \frac{1}{2003}$

c) $\frac{-7}{22} > \frac{-7}{21} = \frac{-1}{3} = \frac{-3}{9} > \frac{-3}{8}$

Vậy $\frac{-7}{22} > \frac{-3}{8}$

d) $\frac{2}{-7} = \frac{-2}{7} = \frac{-4}{14} > \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}$

Vậy $\frac{2}{-7} > \frac{4}{-9}$

Bài 5 Với ba chữ số 1, hãy biểu diễn số hữu tỉ âm nhỏ nhất, số hữu tỉ âm lớn nhất.

Hướng dẫn:

Số hữu tỉ âm nhỏ nhất là -111

Số hữu tỉ âm lớn nhất là $-\frac{1}{11}$

Bài 6 Cho các số hữu tỉ:

$x_1 = \frac{-20}{97}$, $x_2 = \frac{-2020}{9797}$

$x_3 = \frac{202020}{-979797}$, $x_4 = \frac{-20202020}{97979797}$

a) Hãy so sánh các số hữu tỉ đó.

b) Viết tập hợp các số hữu tỉ bằng các số hữu tỉ trên.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:

$$x_1 = \frac{-20}{97} = \frac{-20.101}{97.101} = \frac{-2020}{9797} = x_2$$

$$x_1 = \frac{-20.(-10101)}{97.(-10101)} = \frac{202020}{-979797} = x_3$$

$$x_1 = \frac{-20.1010101}{97.1010101} = \frac{-20202020}{97979797} = x_4$$

Vậy $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

b) Gọi M là tập hợp các số hữu tỉ bằng các số hữu tỉ trên. Ta có:

$$M = \{\frac{-20.m}{97.m} \setminus m \in Z, m \neq 0\}$$

§2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Cộng, trừ hai số hữu tỉ:

Để cộng trừ hai số hữu tỉ x, y ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng mẫu dương rồi áp dụng qui tắc cộng, trừ phân số.

với $x = \frac{a}{m}$; $y = \frac{b}{m}$ $(a, b, m \in Z, m > 0)$

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

$$x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

2. Quy tắc chuyển vế:

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

Với mọi $x, y, z \in Q$: $x + y = z \Rightarrow x = z - y$

3. Chú ý:

– Phép cộng số hữu tỉ có các tính chất của phép cộng phân số: giao hoán, kết hợp, cộng với 0. Mỗi số hữu tỉ đều có một số đối.

– Trong Q cũng có những tổng đại số có thể đổi chỗ các số hạng, đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý.

B. Các bài toán

Bài 4 Thực hiện phép tính:

$4 - \frac{7}{5}$; $\quad \frac{2}{5} - \frac{-7}{10}$; $\quad \frac{-4}{9} + \frac{3}{-5}$; $\quad \frac{6}{7} - 2$

Giải

$$4 - \frac{7}{5} = 4 + \frac{-7}{5} = \frac{20 + (-7)}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{-7}{10} = \frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{4+7}{10} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{-4}{9} + \frac{3}{-5} = \frac{-4}{9} + \frac{-3}{5} = \frac{-20-27}{45} = \frac{-47}{45}$$

$$\frac{6}{7} - 2 = \frac{6}{7} + (-2) = \frac{6 + (-14)}{7} = \frac{-8}{7}$$

Bài 5 Tìm số đối của $\frac{4}{11}$; $\frac{2}{-15}$; $\frac{17}{32}$; $\frac{-11}{-23}$

Giải

Số đối của $\frac{4}{11}$ là: $\frac{-4}{11}$

Số đối của $\frac{2}{-15}$ là: $\frac{2}{15}$

Số đối của $\frac{17}{32}$ là: $\frac{-17}{32}$

Số đối của $\frac{-11}{-23}$ là: $\frac{-11}{23}$

Bài 6 Tìm x:

a) $x - \frac{7}{5} = \frac{1}{10}$ b) $\frac{3}{2} + x = -2$ c) $\frac{2}{3} - x = \frac{1}{4}$

Giải

a) $x - \frac{7}{5} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{10} + \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{1+14}{10}$

$\Rightarrow x = \frac{15}{10} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{2} + x = -2 \Rightarrow x = -2 - \frac{3}{2} \Rightarrow x = -2 + \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{-4 + (-3)}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

c) $\frac{2}{3} - x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2}{3} + \frac{-1}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{8 + (-3)}{12} \Rightarrow x = \frac{5}{12}$

Bài 7 Tính nhanh:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \frac{7}{8} \div \frac{6}{7} - \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

Giải

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{6}{7} - \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}\right) + \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

C. Luyện tập

Bài 7 Cho a, b ∈ Z và b ≠ 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}$ và $\frac{-a}{b}$ là hai số đối nhau.

Hướng dẫn:

Để chứng minh $\frac{a}{b}$ và $\frac{-a}{b}$ là hai số đối nhau, ta chứng minh tổng của chúng bằng 0. Thật vậy:

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a + (-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

Bài 8 Tính:

a) $\frac{2}{3} + (-\frac{1}{4}) + \frac{7}{12} - (-\frac{1}{4}) - \frac{5}{6}$

b) $2 - \{\frac{1}{2} - [2 - (\frac{1}{2} + 2) - \frac{1}{2}] + 2\}$

Giải

a) $\frac{2}{3} + (-\frac{1}{4}) + \frac{7}{12} - (-\frac{1}{4}) - \frac{5}{6}$

$= \frac{2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} + \frac{-5}{6}$

$= (\frac{2}{3} + \frac{7}{12} + \frac{-5}{6}) + (\frac{-1}{4} + \frac{1}{4})$

$= \frac{8 + 7 + (-10)}{12} = \frac{5}{12}$

b) $2 - \{\frac{1}{2} - [2 - (\frac{1}{2} + 2) - \frac{1}{2}] + 2\}$

$= 2 - \frac{1}{2} + [2 - (\frac{1}{2} + 2) - \frac{1}{2}] - 2$

$= 2 - \frac{1}{2} + 2 - (\frac{1}{2} + 2) - \frac{1}{2} - 2$

$= 2 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

Bài 9 Thực hiện phép tính sau một cách hợp lý:

$$(+\frac{1}{3}) - (+\frac{3}{4}) - (-\frac{3}{5}) + \frac{1}{57} - (+\frac{1}{36}) + \frac{1}{15} + (-\frac{2}{9})$$

Hướng dẫn:

$$(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{15}) - (\frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{36}) + \frac{1}{57} = 1 - 1 + \frac{1}{57} = \frac{1}{57}$$

Bài 10 Thực hiện phép tính một cách hợp lý:

$$(-\frac{1}{2}) - (-\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{9}) + \frac{1}{127} - (+\frac{7}{18}) + \frac{4}{35} - (-\frac{2}{7})$$

$$[(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{9}) + (-\frac{7}{18})] + (\frac{3}{5} + \frac{4}{35} + \frac{2}{7}) + \frac{1}{127}$$

$$= \frac{-9-2-7}{18} + \frac{21+4+10}{35} + \frac{1}{127} = -1 + 1 + \frac{1}{127} = \frac{1}{127}$$

Bài 11 Cho a, b là hai số nguyên, b > 0. Hãy so sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$. Áp dụng kết quả trên hãy so sánh $\frac{2}{7}$ và $\frac{3}{8}$;

$$\frac{2}{7} \text{ và } \frac{3}{8}; \quad \frac{-17}{25} \text{ và } \frac{-16}{26}; \quad \frac{31}{19} \text{ và } \frac{32}{20}$$

Hướng dẫn:

$$a(b+1) = ab + a \quad \text{và} \quad b(a+1) = ab + b$$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ nếu $a < b$

$\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$ nếu $a > b$

Áp dụng:

Vì $2 < 7$ do đó $\frac{2}{7} < \frac{2+1}{7+1}$ hay $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$

Vì $-17 < 25$ do đó $\frac{-17}{25} < \frac{-16}{26}$;

Vì $31 > 19$ do đó $\frac{31}{19} > \frac{31+1}{19+1}$ hay $\frac{31}{19} > \frac{32}{20}$

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Nhân hai số hữu tỉ:

Với $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$

Ta có $x \,.\, y = \frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

2. Chia hai số hữu tỉ:

Với $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ $(y \neq 0)$

Ta có $x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

3. Chú ý:

a) Phép nhân số hữu tỉ có tính chất của phép nhân phân số: giao hoán, kết hợp, nhân với 1, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng. Mọi số hữu tỉ khác 0 đều có số nghịch đảo.

b) Thương của phép chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y $(y \neq 0)$ gọi là tỉ số của x và y, kí hiệu là $\frac{x}{y}$ hay $x : y$

B. Các bài toán

Bài 8 Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{3}.\left(-\frac{9}{8}\right).\frac{12}{11} : \left(-2\frac{8}{11}\right)$$

Giải

Trước hết ta đổi: $-2\frac{8}{11} = \frac{-30}{11}$

Ta có: $\frac{1}{3}.\left(\frac{-9}{8}\right).\frac{12}{11} : \left(\frac{-30}{11}\right) = \frac{1}{3}.\left(\frac{-9}{8}.\frac{12}{11}.\left(\frac{11}{-30}\right)\right) = \frac{3}{20}$

Bài 9 Tính:

a) $\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) : 4$

b) $\left(2\frac{1}{2} + 3\right) : \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$

c) $7\left(2\frac{1}{3} - 3\right) : \frac{1}{7}$

d) $\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4}\right) : 3\frac{1}{5}$

Giải

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right):4=\left(\frac{1}{5}+\frac{-2}{3}\right):4=\frac{3+(-10)}{15}.\frac{1}{4}=\frac{-7}{15}.\frac{1}{4}=\frac{-7}{60}$

b) $\left(2\frac{1}{2}+3\right):\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=5\frac{1}{2}:\frac{-5+6}{15}=\frac{11}{12}:\frac{1}{5}=\frac{11}{2}.15=\frac{165}{2}$

c) $\left(7\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{7}=7:\frac{1}{7}=7.7.=49$

d) $\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right):3\frac{1}{5}=\frac{8-7}{28}:\frac{16}{5}=\frac{1}{28}.\frac{5}{16}=\frac{5}{448}$

Bài 10 Tìm x, biết:

a) $2(x-5)-3(x+6)=10$

b) $7-\frac{1}{2}(2x-5)-\frac{2}{3}(3x+1)=5$

Giải

a) $2(x-5)-3(x+6)=10$

$2x-10-3x-18=10$

$-x-28=10$

$-x=10+28$

$x=-38$

b) $7-\frac{1}{2}(2x-5)-\frac{2}{3}(3x+1)=5$

$7-x+\frac{5}{2}-2x-\frac{2}{3}=5$

$(-x-2x)+(7+\frac{5}{2}-\frac{2}{3})=5$

$-3x+\frac{53}{6}=5$

$-3x=5-\frac{53}{6}$

$-3x=\frac{-23}{6}$

$-x=\frac{-23}{6}:(-3)$

$x=\frac{23}{18}$

C. Luyện tập

Bài 12 Dùng tính chất phân phối phép nhân đối với phép cộng rồi thực hiện phép tính:

a) $-78 . 31 - 78 . 24 - 78 . 17 + 22 . 72$

b) $2,7 . 10,5 - 7,3 . 10,5 - 7,3 . 15 + 2,7 . 15$

Hướng dẫn:

a) $-78 . 31 - 78 . 24 - 78 . 17 + 22 . 72$

$= -78(31 + 24 + 17) + 22 . 72$

$= -78 . 72 + 22 . 72$

$= 72(-78 + 22) = 72 . (-56) = -4032$

b) $2,7 . 10,5 - 7,3 . 10,5 - 7,3 . 15 + 2,7 . 15$

$= 10,5(2,7 - 7,3) + 15(2,7 - 7,3)$

$= (2,7 - 7,3)(10,5 + 15)$

$= -4,6 . 25,5 = -117,3$

Bài 13 Tính nhanh:

a) $3 . 1\frac{2}{7} - \frac{4}{7}$

b) $(4 - \frac{5}{12}) : 2 + \frac{5}{24}$

Hướng dẫn:

a) $3 . 1\frac{2}{7} - \frac{4}{7} = 3\,(1 + \frac{2}{7}) - \frac{4}{7}$

$= 3 + \frac{6}{7} - \frac{4}{7} = 3 + \frac{2}{7} = 3\frac{2}{7}$

b) $(4 - \frac{5}{2}) : 2 + \frac{5}{24} = 4 : 2 - \frac{5}{12} : 2 + \frac{5}{24}$

$= 2 - \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = 2$

Bài 14 Tìm tổng:

a) $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2002.2003}$

b) $B = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})...(1 - \frac{1}{n+1})$; $n \in N$

Hướng dẫn:

a) $A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003}$

$= 1 - \frac{1}{2003} = \frac{2002}{2003}$

b) $B = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Bài 15

Tổng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + ... + \frac{1}{255.257}$ bằng:

a) $\frac{127}{255}$ b) $\frac{128}{255}$ c) $\frac{128}{257}$ d) $\frac{129}{257}$

Hướng dẫn:

Chọn câu c.

Ta có: $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

Phân tích tổng thành:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + .. + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} + ... + \frac{2}{255.257}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{255} - \frac{1}{257}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{257}\right) = \frac{128}{257}$$

§4. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ:

Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x, kí hiệu $|x|$, là khoảng cách từ điểm x tới điểm O trên trục số.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

2. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân:

Để cộng, trừ, nhân, chia số thập phân, ta viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

B. Các bài toán

Bài 11 Khi nào ta có: $|x-3| = 3-x$

Giải

$3 - x = -(x-3)$ nên $|x-3| = -(x-3)$, theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ ta phải có $x - 3 \le 0$ hay $x \le 3$

Bài 12 Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left|x + \frac{1}{2}\right| - |x+2| + |2-x| \quad \text{khi} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Giải

Ta có:

$$A = \left|x + \frac{1}{2}\right| - |x+2| + |2-x|$$

Khi $x = -\frac{1}{2}$ ta được:

$$A = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| - \left|-\frac{1}{2} + 2\right| + \left|2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= |0| - \left|\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{5}{2}\right| = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$$

Bài 13 Tìm x biết:

a) $\left|x - \frac{4}{5}\right| = \frac{3}{4}$ b) $6 - \left|\frac{1}{2} - x\right| = \frac{2}{5}$

Giải

a) Có hai trường hợp:

$$x - \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$$

Thử lại: $\left|\frac{31}{20} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{31-16}{20}\right| = \left|\frac{15}{20}\right| = \frac{3}{4}$

$$x - \frac{4}{5} = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{1}{20}$$

Thử lại: $\left|\frac{1}{20}-\frac{4}{5}\right|=\left|\frac{1-16}{20}\right|=\frac{3}{4}$

Vậy $x=\frac{31}{20}$; $x=\frac{1}{20}$

b) $6-\left|\frac{1}{2}-x\right|=\frac{2}{5}$

$$\left|\frac{1}{2}-x\right|=6-\frac{2}{5}\Rightarrow\left|\frac{1}{2}-x\right|=\frac{28}{5}$$

- $\frac{1}{2}-x=\frac{28}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{28}{5}=\frac{5+(-56)}{10}=\frac{-51}{10}$
- $\frac{1}{2}-x=-\frac{28}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-(-\frac{28}{5})=\frac{1}{2}+\frac{28}{5}=\frac{61}{10}$

Cả hai giá trị của x thử lại đều thích hợp.

Vậy $x=\frac{-51}{10}$ $x=\frac{61}{10}$

C. Luyện tập:

Bài 16

a) $\left|x+\frac{3}{2}\right|+|x-3|$, biết $x \geq 3$

b) $-\left|x+\frac{2}{5}\right|+\left|\frac{4}{3}-x\right|$, biết $x > 2$

Hướng dẫn:

a) $x \geq 3$ nên $x+\frac{2}{3}>0$, $x-3\geq 0$

nên $\left|x+\frac{3}{2}\right|+|x-3|=x+\frac{2}{3}+x-3=2x-\frac{7}{3}$

b) $x > 2$ nên $x+\frac{2}{5}>0$, $\frac{4}{3}-x<0$

nên $-\left|x+\frac{2}{5}\right|+\left|\frac{4}{3}-x\right|=-(x+\frac{2}{5})+(x-\frac{4}{3})=\frac{-26}{15}$

Bài 17 Tìm x, y biết = $|3x - 9| + |2 - y| = 0$

Hướng dẫn:

$|3x - 9| \geq 0$, $|2 - y| \geq 0$ nên tổng bằng 0 khi và chỉ khi chúng bằng 0.

Vậy $x = 3$, $y = 5$

Bài 18 Tìm x biết $(|x + 1| + 6)(x - 2) = 0$ với $x < -1$.

Hướng dẫn:

$|x + 1| + 6 > 0$ với mọi x, $x < -1$ nên $x - 2 < -3 \neq 0$.

Vậy không có giá trị của x để tích trên bằng 0.

Bài 19 Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = \left|x - \frac{3}{4}\right|$ b) $B = 1,5 + |2 - x|$

Hướng dẫn:

a) Ta có $|x| \geq 0$

nên $A = \left|x - \frac{3}{4}\right| \geq 0 \Rightarrow$ A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi

$x - \frac{3}{4} = 0$ hay $x = \frac{3}{4}$

b) $B = 1,5 + |2 - x| \geq 1,5$

Vậy B nhỏ nhất bằng 1,5 khi $x = 2$

Bài 20 Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $C = -|x + 2|$ b) $D = 1 - |2x - 3|$

Hướng dẫn:

a) $C = -|x + 2| \leq 0$

C đạt giá trị lớn nhất là 0 khi $x = -2$

b) $D = 1 - |2x - 3| \leq 1$

D đạt giá trị lớn nhất là 1 khi $x = \frac{3}{2}$

§5. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên:

Cho n là số tự nhiên khác 0. Lũy thừa bậc n của số hữu tỉ x, là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng x.

$$x^n = \underbrace{x \,.\, x \,.\, x \ldots x}_{n \text{ thừa số } x} \quad (x \in Q,\ n \in N^*)$$

x^n (gọi là một lũy thừa, x là cơ số, n là số mũ)

$$x^1 = x$$

Quy ước: $x^0 = 1$ $(x \in Q,\ x \neq 0)$;

2. Tích của hai lũy thừa cùng cơ số:

$$x^m . x^n = x^{m+n}$$

3. Thương của hai lũy thừa cùng cơ số:

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0,\ m \geq n)$$

4. Lũy thừa của lũy thừa

$$(x^m)^n = x^{m\,.\,n}$$

B. Các bài toán

Dùng 10 chữ số khác nhau để biểu diễn số 1 mà không dùng các phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

Giải

Ta có 10 chữ số khác nhau là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sử dụng qui tắc: $a^0 = 1$

Có nhiều cách biểu diễn số 1 như sau:

123456789^0; 234567891^0; 345678912^0; ...

Bài 14 Hãy chọn câu trả lời đúng trong các câu sau:

Tích $2^6 . 2^2$ bằng:

a) 2^3 b) 2^4 c) 2^8 d) 2^{12} e) 4^{12}

Giải

Ta có: $2^6 . 2^2 = 2^{6+2} = 2^8$

Vậy chọn câu b.

Bài 15 Chọn câu đúng trong các câu sau:

$a^n : a^2$ bằng

a) a^{n+2} b) $a^{n:2}$ c) a^{2n}

d) a^{n-2} e) a^{2-n}

Giải

Ta có: $a^n : a^2 = a^{n-2}$. Vậy chọn câu d.

Bài 16 Tìm x, biết rằng:

a) $(x - \frac{3}{4})^2 = 0$ b) $(x - 3)^2 = 1$

c) $(2x + 1)^3 = -8$ d) $(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4}$

Giải

a) $(x - \frac{3}{4})^2 = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

b) $(x - 3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

c) $(2x + 1)^3 = -8 \Rightarrow (2x + 1)^3 = (-2)^3$

$\Rightarrow 2x + 1 = -2 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

d) $(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 = (\pm \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

C. Luyện tập

Bài 21 Viết các biểu thức sau dưới dạng a^n ($a \in Q$, $n \in Z$).

a) $9 . 3^3 . \frac{1}{81}$ b) $4 . 2^5 : (2^3 . \frac{1}{16})$ c) $3^4 . 3^5 : \frac{1}{27}$

Hướng dẫn:

a) $9 . 3^3 . \frac{1}{81} = 3^2 . 3^3 : 3^4 = 3^5 : 3^4 = 3$

b) $4 . 2^5 : (2^3 . \frac{1}{16}) = 2^2 . 2^5 : (2^3 : 2^4) = 2^7 : (\frac{1}{2}) = 2^7 . 2 = 2^8$

c) $3^4 . 3^5 : \frac{1}{27} = 3^4 . 3^5 . 2^{27} = 3^4 . 3^5 . 3^3 = 3^{12}$

Bài 22 Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì :

$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Hướng dẫn:

Ta có: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^{n+2} + 3^n - (2^{n+2} + 2^n)$

$= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n . 10 - 2^n . 5 = 3^n . 10 - 2^{n-1} . 10$

$= (3^n - 2^{n-1}) . 10$ chia hết cho 10.

Bài 23 Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho:

$2 . 32 \geq 2^n > 8$

Hướng dẫn:

Ta có: $2 . 32 = 2 . 2^5 = 2^6$

$8 = 2^3$

nên đề bài đã cho trở thành:

$2^6 \geq 2^n > 2^3$

$\Rightarrow 6 \geq n \geq 2$

$\Rightarrow n \in \{4, 5, 6\}$

§6. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ (tiếp)

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Lũy thừa của một tích:

$(x . y)^n = x^n . y^n$

2. Lũy thừa của một thương:

$(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$ $(y \neq 0)$

B. Các bài toán:

Bài 17 Tính:

a) $(\frac{1}{2})^3 . (\frac{1}{4})^2$

b) $27^3 : 9^3$

c) $125^2 : 25^3$

d) $\frac{27^2.8^5}{6^6.32^3}$

Giải

a) $(\frac{1}{2})^3 . [(\frac{1}{2})^2]^2 = (\frac{1}{2})^3 . (\frac{1}{4})^4 = (\frac{1}{2})^7 = \frac{1}{128}$.

b) $\frac{27^3}{9^3} = (\frac{27}{9})^3 = 3^3 = 27$

c) $125^2 : 25^3 = (5^3)^2 : (5^2)^2 = 5^6 : 5^6 = 1$

d) $\frac{27^2.8^5}{6^6.32^3} = \frac{(3^3)^2.(2^3)^5}{(2.3)^6.(2^5)^3} = \frac{3^6.2^{15}}{2^6.3^6.2^{15}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Bài 18 Tính:

a) $(-2)^3 + 2^2 + (-1)^{20} + (-2)^0$

b) $(3^2)^2 - (-5^2)^2 + ((-2)^3)^2$

c) $2^4 + 8[(-2)^2 : \frac{1}{2}]^0 - 2^{-2} . 4 + (-2)^2$

Giải

a) $(-2)^3 + 2^2 + (-1)^{20} + (-2)^0$

$= -2^3 + 2^2 + 1^{20} + 1 = -8 + 4 + 1 + 1 = -2$

b) $(3^2)^2 - (-5^2)^2 + ((-2)^3)^2$

$= 3^{2.2} - 5^{2.2} + (-2^3)^2 = 3^4 - 5^4 + 2^6 = 81 - 625 + 64 = -480$

c) $2^4 + 8[(-2)^2 : \frac{1}{2})]^0 - 2^{-2}.4 + (-2)^2 =$

$= 2^4 + 8 . 1 - 2^{-2} . 2^2 + 2^2 = 16 + 8 - 2^{-2+2} + 4$

$= 16 + 8 - 2^0 + 4 = 28 - 1 = 27$

C. Luyện tập

Bài 24 Tính:

a) $(-0,1)^2.(-0,1)^3$

b) $(-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2})^4$

c) $(-0,02)^5 : (-0,02)^3$

d) $[(-2)^2]^3$

Giải

a) $(-0,1)^2.(-0,1)^3 = (-0,1)^5 = -0,00001$

b) $(-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2})^4 = (-\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$

c) $(-0,02)^5 : (-0,02)^3 = (-0,02)^2 = 0,0004$

d) $[(-2)^2]^3 = (-2)^6 = 64$

Bài 25 Các số sau đây số nào lớn hơn?

a) 5^{300} và 3^{500} b) 2^{700} và 5^{300} c) 2^{400} và 4^{200}

Giải

a) Ta có: $5^{300} = (5^3)^{100} = (125)^{100}$

$3^{500} = (3^5)^{100} = (243)^{100}$

Vì $125 < 243$ nên $(125)^{100} < (243)^{100}$

hay $5^{300} < 3^{500}$

b) $2^{700} = (2^7)^{100} = (128)^{100}$

$5^{300} = (5^3)^{100} = (125)^{100}$

mà $128 > 125$ nên $(128)^{100} > (125)^{100}$

Vậy $2^{700} > 5^{300}$

c) $2^{400} = (2^4)^{100} = (16)^{100}$

$4^{200} = (4^2)^{100} = (16)^{100}$

Vậy $2^{400} = 4^{200}$

Bài 26 Tính:

a) $(\frac{1}{5})^3 . 10^3$ b) $(-\frac{2}{3})^4 : 2^4$

c) $32^2 : 4^3$ d) $(\frac{2}{3})^4 . 9^2$ e) $(\frac{3}{4})^3 . 4^4$

Hướng dẫn:

a) $(\frac{1}{5})^3 . 10^3 = (\frac{1}{5} . 10)^3 = 2^3 = 8$

b) $(-\frac{2}{3})^4 : 2^4 = (\frac{-2}{3} : 2)^4 = (\frac{-2}{3} . \frac{1}{2})^4 = (\frac{-1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

c) $32^2 : 4^3 = (2^5)^2 : (2^2)^3 = 2^{10} : 2^6 = 2^4 = 16$

d) $(\frac{2}{3})^4 . 9^2 = (\frac{2}{3})^4 . (3^2)^2 = (\frac{2}{3})^4 . 3^4 = (\frac{2}{3} . 3)^4 = 2^4 = 16$

e) $(\frac{3}{4})^3 . 4^4 = (\frac{3}{4} . 4)^3 . 4 = 3^3 . 4 = 81 . 4 = 324$

Bài 27 Chứng minh rằng:

a) $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 11

b) $10^9 + 10^8 + 10^7$ chia hết cho 222

c) $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ chia hết cho 45

d) $24^{54} . 54^{24} . 2^{10}$ chia hết cho 72^{63}

Hướng dẫn:

a) Ta có: $7^6 + 7^5 - 7^4 = 7^4(7^2 + 7 - 1)$

$= 7^4(49 + 7 - 1) = 7^4 . 55 = 7^4 . 5 . 11$ chia hết cho 11

Vậy $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 11

b) Ta có: $10^9 + 10^8 + 10^7 = 10^7(10^2 + 10 + 1)$

$= (2 . 5)^7 (10^2 + 10 + 1)$

$= 2^7 . 5^7 (100 + 10 + 1)$

$= 2^6 . 5^7 . 2 . 111$

$= 2^6 . 5^7 . 222$ chia hết cho 222

Vậy $10^9 + 10^8 + 10^7$ chia hết cho 222

c) Ta có $81^7 - 27^9 - 9^{13} = (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13}$

$= 3^{28} - 3^{27} - 3^{26}$

$= 3^{26} (3^2 - 3 - 1)$

$= 3^2 . 3^{24} . 5 = 3^{24} . 45$ chia hết cho 45

Vậy $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ chia hết cho 45

d) Ta có $72^{63} = (8 . 9)^{63} = (2^3 . 3^2)^{63} = 2^{3 . 63} . 3^{2 . 63} = 2^{189} . 3^{126}$

$24^{54} = (3 . 8)^{54} = (3 . 2^3)^{54} = 3^{54} . 2^{3 . 54} = 3^{54} . 2^{162}$

$54^{24} = (2 . 27)^{24} = (2 . 3^3)^{24} = 2^{24} . 3^{3 . 24} = 2^{24} . 3^{72}$

Do đó:

$24^{54} . 54^{24} . 2^{10} = 3^{54} . 2^{162} . 2^{24} . 3^{72} . 2^{10} = 2^{162 + 24 + 10} . 3^{54 + 72}$

$= 2^{196} . 3^{126} = 2^7 . 2^{189} . 3^{126}$

$= 2^7 . 72^{63}$ chia hết cho 72^{63}

Vậy $24^{54} . 54^{24} . 2^{10}$ chia hết cho 72^{63}

§7. TỈ LỆ THỨC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Định nghĩa:

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ còn được viết là $a : b = c : d$.

a, b, c, d là các số hạng của tỉ lệ thức.

a và d gọi là ngoại tỉ, b và c gọi là trung tỉ.

2. Tính chất cơ bản:

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $a . d = b . c$

3. Điều kiện để bốn số lập thành tỉ lệ thức

Nếu $ad = bc$ và $a, b, c, d \neq 0$ thì ta có các tỉ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

B. Các bài toán

Bài 19 Thay tỉ số các số sau bằng tỉ số giữa các số nguyên:

$\frac{7}{5} : \frac{4}{3}$; $1,7 : 0,85$; $\frac{1}{5} : 0,5$; $0,02 : 1,8$

Giải

$$\frac{7}{5} : \frac{4}{3} = \frac{7}{5} . \frac{3}{4} = \frac{21}{20}$$

$$1,7 : 0,85 = \frac{1,7}{0,85} = \frac{170}{85}$$

$$\frac{1}{5} : 0,5 = \frac{1}{5} : \frac{5}{10} = \frac{1}{5} . \frac{10}{5} = \frac{10}{25}$$

$$0,02 : 1,3 = \frac{2}{130}$$

Bài 20 Các tỉ số sau có lập thành một tỉ lệ thức không?

a) $\frac{15}{21}$ và $\frac{30}{42}$; b) $0,25 : 1,75$ và $\frac{1}{7}$

c) $0,4 : \frac{5}{3}$ và $\frac{3}{5}$; d) $0,25 : 1,5$ và $\frac{3}{7} : \frac{3}{2}$

Giải

Ta có:

a) $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ và $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$

nên lập thành một tỉ lệ thức ($\frac{15}{21} = \frac{30}{42}$)

b) $0{,}25 : 1{,}75 = \frac{25}{175} = \frac{5}{35}$ và $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$

nên lập thành một tỉ lệ thức ($0{,}25 : 1{,}75 = \frac{1}{7}$)

c) $0{,}4 : \frac{5}{3} = \frac{4}{10} : \frac{5}{3} = \frac{4}{10} . \frac{3}{5} = \frac{12}{50}$ và $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}$;

nên không lập thành một tỉ lệ thức ($0{,}4 : \frac{5}{3} \neq \frac{3}{5}$)

d) $0{,}25 : 1{,}5 = \frac{25}{100} : \frac{15}{10} = \frac{25}{100} . \frac{10}{15} = \frac{250}{1500} = \frac{25}{150}$ và

$\frac{3}{7} : \frac{3}{2} = \frac{3}{7} . \frac{2}{3} = \frac{6}{21} = \frac{24}{84}$

nên không lập thành một tỉ lệ thức ($0{,}25 : 1{,}5 \neq \frac{3}{7} : \frac{3}{2}$)

Bài 21 Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{x}{3{,}15} = \frac{0{,}15}{7{,}2}$

b) $\frac{-2{,}6}{x} = \frac{-12}{42}$

c) $\frac{11}{10{,}5} = \frac{6{,}32}{x}$

d) $\frac{\frac{41}{10}}{\frac{9}{4}} = \frac{x}{7{,}3}$

Giải

a) $\frac{x}{3{,}15} = \frac{0{,}15}{7{,}2} \Rightarrow x = \frac{0{,}15 . 3{,}15}{7{,}2} = 0{,}065625$

b) $\frac{-2{,}6}{x} = \frac{-12}{42} \Rightarrow x = \frac{-2{,}6 . 42}{-12} = 9{,}1$

c) $\frac{11}{10{,}5} = \frac{6{,}32}{x} \Rightarrow x = \frac{6{,}32 . 10{,}5}{11} = 6{,}03$

d) $\frac{\frac{41}{10}}{\frac{9}{4}} = \frac{x}{7{,}3} \Rightarrow \frac{\frac{41}{10} . 7{,}3}{\frac{9}{4}} = \frac{4{,}1 . 7{,}3}{2{,}25} = 13{,}3$

C. Luyện tập

Bài 28 Có thể lập được tỉ lệ thức từ các số sau đây không? Nếu có hãy viết tỉ lệ thức đó: 3; 9; 27; 81; 243

Hướng dẫn:

Từ 4 trong 5 số đã cho, ta có thể lập được ba đẳng thức:

$3 \,.\, 243 = 9 \,.\, 81$ (1) $\quad 9.243 = 27 \,.\, 81$ (2)

$3 \,.\, 81 = 9 \,.\, 27$ (3)

Từ mỗi đẳng thức trên, ta lại lập được bốn tỉ lệ thức.

– Chẳng hạn từ (1) ta có:

$$\frac{3}{9} = \frac{81}{243};\ \frac{3}{81} = \frac{9}{243};\ \frac{243}{9} = \frac{81}{3};\ \frac{243}{81} = \frac{9}{3}$$

Bài 29

Tìm x trong tỉ lệ thức:

a) $\dfrac{x-1}{x+5} = \dfrac{6}{7}$ $(x \neq 5)$

b) $\dfrac{x^2}{6} = \dfrac{24}{25}$ $\quad$ c) $\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{x+4}{x+7}$

Hướng dẫn:

a) $\dfrac{x-1}{x+5} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow (x-1)7 = (x+5)6$

$\Rightarrow 7x - 7 = 6x + 30$

$\Rightarrow 7x - 6x = 30 + 7$

$\Rightarrow x = 37$

b) $\dfrac{x^2}{6} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow x^2 = \dfrac{24.6}{25}$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{144}{25} \quad \Rightarrow x = \dfrac{12}{5};\quad x = \dfrac{-12}{5}$

c) Ta có: $\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{x+4}{x+7}$

Suy ra $(x-2)(x+7) = (x+4)(x-1)$

$x^2 + 7x - 2x - 14 = x^2 - x + 4x - 4$

$x^2 + 5x - 14 = x^2 + 3x - 4$

$2x = 10$

Vậy $x = 5$

Bài 30 Tìm hai số x và y biết:

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{13} \text{ và } x + y = 80$$

Hướng dẫn:

Đặt $\frac{x}{7} = \frac{y}{13} = k$

Ta có: $x = 7k$; $y = 13k$

Vì $x + y = 80 \Rightarrow 7k + 13k = 80$

$\Rightarrow 20k = 80 \Rightarrow k = 4$

Nên $x = 7 . 4 = 28$

$y = 13 . 4 = 52$

Bài 31 Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta có thể suy ra:

a) $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ b) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ d) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

Hãy chọn câu đúng trong các câu trên.

Hướng dẫn:

Chọn câu d

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

Ta có: a . $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} \Rightarrow ab = cd$, sai

b) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \Rightarrow bd = ac$, sai

c) $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow ac = bd$, sai

d) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow ad = bc$, đúng

§8. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Tính chất:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \quad (b \neq \pm d)$$

Mở rộng: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

2. Chú ý:

Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2; 3; 5.

Ta cũng viết a: b : c = 2 : 3 : 5

B. Các bài toán

Bài 22 Tìm x, y biết:

a) $\frac{x}{y} = \frac{7}{13}$ và $x + y = -60$

b) $\frac{x}{19} = \frac{y}{21}$ và $2x - y = 34$

c) $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16}$ và $x^2 + y^2 = 100$

Giải

a) $\frac{x}{y} = \frac{7}{13}$ và $x + y = -60$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{13} = \frac{x+y}{7+13} = \frac{60}{20} = -3$$

Do đó: $\frac{x}{7} = -3 \Rightarrow x = -21$

$\frac{y}{13} = -3 \Rightarrow y = -39$

b) $\frac{x}{19} = \frac{y}{21} \Rightarrow \frac{2x}{38} = \frac{y}{21} = \frac{2x - y}{38 - 21} = \frac{34}{17} = 2$

Do đó: $\frac{x}{19} = 2 \quad \Rightarrow x = 38$

$\frac{y}{21} = 2 \quad \Rightarrow y = 42$

c) $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 + y^2}{19 + 6} = \frac{100}{25} = 4$

Do đó: $\frac{x^2}{9} = 4 \quad \Rightarrow x^2 = 36 \quad \Rightarrow x = \pm 6$

$\frac{y^2}{16} = 4 \quad \Rightarrow y^2 = 64 \quad \Rightarrow y = \pm 8$

Bài 23 Cho hai số khác 0 có hiệu tổng và tích tỉ lệ với 1:7:24. Vậy tích của chúng là:

a) 6 b) 12 c) 24 d) 48 e) 96

Giải

Chọn câu d

Gọi y và x là hai số cần tìm, ta có:

$$\frac{x - y}{1} = \frac{x + y}{7} = \frac{xy}{24}$$

Áp dụng tính chất của dãy số bằng nhau:

$$\frac{xy}{24} = \frac{x - y}{1} = \frac{x + y}{7} = \frac{x - y + x + y}{1 + 7} = \frac{2x}{8}$$

Suy ra: $\frac{xy}{x} = \frac{2.24}{8} \quad \Rightarrow y = 6 \quad \Rightarrow x = 8$

Do đó $xy = 48$.

C. **Luyện tập**

Bài 32 Tìm các số x, y, z biết:

a) $x = \frac{y}{2} = \frac{2}{3}$ và $4x - 3y + 2z = 36$

b) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 14$

Hướng dẫn:

a) Ta có:

$$x = \frac{y}{2} = \frac{2}{3} = \frac{4x}{4} = \frac{3y}{6} = \frac{2z}{6} = \frac{4x - 3z + 2z}{4 - 6 + 6} = \frac{36}{4} = 9$$

Suy ra: $x = 9$

$\frac{y}{2} = 9 \Rightarrow y = 18$

$\frac{z}{3} = 9 \Rightarrow z = 27$

b) Ta có:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-1}{2} = \frac{2y-4}{6} = \frac{3z-9}{12} =$$

$$= \frac{x - 1 - 2y + 4 + 3z - 9}{2 - 6 + 12} = \frac{14 - 6}{8} = 1$$

Suy ra: $\frac{x-1}{2} = 1 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

$\frac{y-2}{3} = 1 \Rightarrow y - 2 = 3 \Rightarrow y = 5$

$\frac{z-3}{4} = 1 \Rightarrow z - 3 = 4 \Rightarrow z = 7$

Cách khác: Chẳng hạn câu b)

Đặt $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = t$

Suy ra $x = 2t + 1$; $y = 3t + 2$; $z = 3t + 4$

Từ đẳng thức $x - 2y + 3z = 14$, ta có:

$2t + 1 - 2(3t + 2) + 3(3t + 4) = 14$

$\Rightarrow 5t + 9 = 14 \Rightarrow t = 1$

Ta tìm được: $x = 3$; $y = 5$; $z = 7$

Bài 33 Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì

$$\frac{5a + 3b}{5a - 3b} = \frac{5c + 3d}{5c - 3d}$$

Hướng dẫn:

Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Mặt khác $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{5a}{5c} = \frac{3b}{3d} = \frac{5a+3b}{5c+3d} = \frac{5a-3b}{5c-3d}$

Vậy $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c-3d}{5c-3d}$

Bài 34 Chứng minh từ tỉ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$ ta suy ra $a^2 = bc$

Hướng dẫn:

Ta có: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} = k \quad \Rightarrow a + b = k(a - b)$

$c + a = k(c - a)$

$\Rightarrow a(1 - k) = -b(1 + k)$

$c(1 - k) = -a(1 + k)$

$\Rightarrow \frac{a(1-k)}{c(1-k)} = \frac{-b(1+k)}{-a(1+k)}$

$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 = bc$

§9. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

- Nếu một phân tối giản với mẫu dương mà mẫu không chứa thừa số nguyên tố nào khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
- Nếu một phân tối giản với mẫu dương mà mẫu có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- Để viết gọn số thập phân vô hạn tuần hoàn, người ta đặt chu kỳ trong dấu ngoặc.

Ghi nhớ: Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

B. Các bài toán

Bài 24 Giải thích tại sao các phân số sau viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn rồi viết dưới dạng đó:

$\frac{5}{16}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{51}{40}$; $\frac{113}{125}$

Giải

– Ta có: $16 = 2^4$; $25 = 5^2$; $40 = 5 \,.\, 2^3$; $125 = 5^3$

Ta thấy rằng mẫu số các phân số chỉ chứa các thừa số nguyên tố 2 hoặc 5 nên các phân số này viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

– Viết dưới dạng số thập phân:

- $\frac{5}{16} = 0{,}3125$;
- $\frac{7}{25} = 0{,}28$
- $\frac{51}{40} = 1{,}2750$;
- $\frac{113}{125} = 0{,}904$

Bài 25 Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn:

$\frac{4}{11}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{8}{25}$; $\frac{17}{40}$;

Giải

$\frac{4}{11} = 0{,}(36)$; $\frac{5}{12} = 0{,}41(6)$

$\frac{8}{25} = 0{,}32$; $\frac{17}{40} = 0{,}425$

Bài 26 Viết các số hữu tỉ sau đây dưới dạng phân số:

0,00(24); 0,75; 1,28; 0,(12); 1,3(4)

Giải

$$0{,}00(24) = \frac{1}{100}.0{,}(24) = \frac{1}{100}.\frac{24}{99} = \frac{2}{825}$$

$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $1,28 = \frac{128}{100} = \frac{32}{25}$; $0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

$1,3(4) = 1,3 + 0,0(4) = 1,3 + \frac{1}{10} . 0,(4)$

$= \frac{13}{10} + \frac{4}{90} = \frac{121}{90}$

C. Luyện tập

Bài 35 Chứng tỏ rằng:

a) $0,(32) + 0,(67) = 1$ b) $0,(33) . 3 = 1$

Hướng dẫn:

a) $0,(32) = \frac{32}{99}$; $0,(67) = \frac{67}{99}$

Do đó: $0,(32) + 0,(67) = \frac{32}{99} + \frac{67}{99} = \frac{32 + 67}{99} = \frac{99}{99} = 1$

b) $0,(33) = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$

nên $0,(33) . 3 = \frac{1}{3} . 3 = 1$

Bài 36 Tính $[12,(1) - 2,3(6)] : 4,(21)$

Hướng dẫn:

Trước hết cần đổi các số thập phân tuần hoàn ra phân số:

Ta có: $12,(1) = 12\frac{1}{9}$

$2,3(6) = 2\frac{36 - 3}{90} = 2\frac{11}{30}$

$4,(21) = 4\frac{21}{99} = 4\frac{7}{33}$

Vậy: $[12,(1) - 2,3(6)] : 4,(21) = (12\frac{1}{9} - 2\frac{33}{90}) + 4\frac{7}{33}$

$= (12\frac{10}{90} - 2\frac{33}{90}) : 4\frac{7}{33} = 9\frac{67}{90} : 4\frac{7}{33} = \frac{877}{90} . \frac{33}{139}$

$= 2 . \frac{1307}{4170}$

Bài 37 Tìm x với x : 0,(3) = 0,(12) được x bằng:

a) 0,4 b) 0,(36) c) $\frac{4}{99}$ d) $\frac{1}{33}$

Hướng dẫn:

Chọn c

$x : \frac{3}{9} = \frac{12}{99} \Rightarrow x = \frac{12}{99}.\frac{1}{3} = \frac{4}{99}$

Bài 38 Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,(12) được viết dưới dạng một phân số tối giản, thế thì tổng của tử và mẫu số là:

a) 111 b) 74 c) 37 d) 33

Hướng dẫn:

Chọn câu c

$0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \Rightarrow 4 + 33 = 37$

§10. LÀM TRÒN SỐ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại.

Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại.

B. Các bài toán

Bài 27 Thực hiện phép tính rồi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất:

a) 8,04 + 2,2239

b) 2710,32 – 1518,0394

c) 52,48 . 16,3

d) 824,06 : 132,022

Giải

a) 8,04 + 2,2239 = 10,279

Kết quả sau khi làm tròn là: 10,3

b) 2710,32 – 1518,0394 = 1192,2806

Kết quả sau khi làm tròn là: 1192,3

c) 52,48 . 16,3 = 855,424

Kết quả sau khi làm tròn là: 855,4

d) 824,06 : 132,022 = 6,2418...

Kết quả sau khi làm tròn là: 6,2

Bài 28 Viết các hỗn số sau dưới dạng số thập phân gần đúng, chính xác đến hai chữ số thập phân, ba chữ số thập phân.

a) $2\frac{2}{3}$ b) $4\frac{3}{7}$ c) $5\frac{3}{11}$

Giải

a) $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2,(6)$

– Chính xác đến hai chữ số thập phân: 2,67

– Chính xác đến ba chữ số thập phân: 2,667

b) $4\frac{3}{7} = \frac{31}{7} = 4,(428571)$

Kết quả: 4,43; 4,429

c) $5\frac{3}{11} = \frac{58}{11} = 5,(27)$

Kết quả: 5,27; 5,273

C. Luyện tập

Bài 39 Làm tròn các số sau đây:

a) Tròn chục: 1234,32; 4357,41

b) Tròn trăm: 273629; 125693,159

c) Tròn nghìn: 9736972; 73214259

Hướng dẫn:

a) 1230; 4360

b) 273600; 125700

c) 9737000; 73214000

Bài 40 Thực hiện phép tính rồi làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai:

$$0,(3) + 3\frac{1}{3} - 0,4(2)$$

Giải

Ta có: $0,(3) + 3\frac{1}{3} - 0,4(2)$

$$= \frac{3}{9} + \frac{10}{3} - 0,4 - \frac{2}{90}$$

$$= \frac{11}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{45} = \frac{165 - 18 - 1}{45} = \frac{146}{45} = 3,2(4)$$

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được: 3,24

Bài 41 Tìm x chính xác đến hai chữ số thập phân:

$$0,875x = 2\frac{5}{8} - \frac{3}{4}$$

Giải

Ta có: $0,875x = 2\frac{5}{8} - \frac{3}{4} = = \frac{21}{8} - \frac{6}{8} = \frac{15}{8}$

$$x = \frac{15}{8} : 0,875 = \frac{15}{8} . \frac{1000}{875} = \frac{15000}{7000}$$

$$x = 2,(142857)$$

Vậy $x \approx 2,14$

§11. SỐ VÔ TỈ – KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Số vô tỉ:

Số vô tỉ là số bỏ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ được kí hiệu là I.

2. Căn bậc hai:

Căn bậc hai của một số a không âm là một số x sao cho

$x^2 = a$

Số dương a có đúng hai căn bậc hai: một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$. Số 0 chỉ có đúng một căn bậc hai là số 0, cũng viết là $\sqrt{0} = 0$

Chú ý: không được viết $\sqrt{4} = \pm 2$

B. Các bài toán

Bài 29 Các số sau đây là căn bậc hai của số nào?

$2; -5; 25; 0; \sqrt{5}$

Hướng dẫn:

2 là căn bậc hai của 4

–5 là căn bậc hai của 25

25 là căn bậc hai của 625

0 là căn bậc hai của 0

$\sqrt{5}$ là căn bậc hai của 5

Bài 30 Trong các số sau, số nào có căn bậc hai? Tìm căn bậc hai của chúng nếu có:

$0; -16; 3^2 + 4^2; 5^2 - 4^2; (-5)^2$

Hướng dẫn:

Một số không âm mới có căn bậc hai.

Do đó trong các số đã cho các số có căn bậc hai là $0; 3^2 + 4^2; 5^2 - 4^2; (-5)^2$

Căn bậc hai của chúng là:

– Với số 0: $\sqrt{0} = 0$

– Với số $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

nên $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5; -\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$

– Với số $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

nên $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3; -\sqrt{5^2 - 4^2} = -3$

Với số $(-5)^2 = 25 = 5^2$

nên $\sqrt{(-5)^2} = 5; -\sqrt{(-5)^2} = -5$

Bài 41 Nếu $\sqrt{2x} = 2$ thì x^2 bằng:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 16

Hãy chọn câu tra lời đúng?

Hướng dẫn:

Ta có: $\sqrt{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 2^2$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

Vậy chọn câu c

C. Luyện tập

Bài 42

a) Trong các giá trị a = 3; –4; 0; 10; –5 giá trị nào thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{a^2} = a$

b) Trong các giá trị a = 2; 0; –6; 1; –5 giá trị nào thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{a^2} = a$

Hướng dẫn:

a) Ta có: $\sqrt{a^2} = a$ khi và chỉ khi $a \geq 0$

Vậy với a = 3; 0; 10 thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{a^2} = a$

b) Ta có: $\sqrt{a^2} = -a$ khi và chỉ khi $a \leq 0$

Vậy với a = 0; –6; –5 thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{a^2} = -a$

Bài 43 Tính:

a) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$; b) $\sqrt{3a^2}$ với $a < 0$

c) $5\sqrt{a^4}$ với $a < 0$; d) $\frac{1}{3}\sqrt{c^6}$ với $c < 0$

Hướng dẫn:

a) $2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a$ (vì $a \geq 0$)

b) $\sqrt{3a^2} = |a|\sqrt{3} = -a\sqrt{3}$ với $a < 0$

c) $5\sqrt{a^4} = 5\sqrt{(a^2)^2} = 5|a^2| = 5a^2$ với $a < 0$;

d) $\frac{1}{3}\sqrt{c^6} = \frac{1}{3}\sqrt{(c^3)^2} = \frac{1}{3}|c^3| = \frac{1}{3}(-c^3) - \frac{1}{3}c^3$

(vì $c < 0$ nên $c^3 < 0$)

Bài 43 Tìm căn bậc hai không âm của các số sau:

a) 25 b) 2500 c) $(-5)^2$

d) 0,49 e) 0,0121 g) 10000

Hướng dẫn:

a) $\sqrt{25} = 5$ b) $\sqrt{2500} = 50$

c) $\sqrt{(-5)^2} = 5$ d) $\sqrt{0,49} = 0,7$

e) $\sqrt{0,0121} = \sqrt{25} = 0,11$ g) $\sqrt{10000} = 100$

Bài 44 Cho ba số sau:

$$\frac{39}{91};\ \sqrt{\frac{3^2}{7^2}};\ \frac{\sqrt{3^2}+\sqrt{39^2}}{\sqrt{7^2}+\sqrt{91^2}}.$$ Số nào bằng $\frac{3}{7}$.

a) Không có b) Chỉ có một số

c) Chỉ có hai số d) Cả ba

Hướng dẫn:

Chọn câu d

$$\frac{39}{91} = \frac{39:13}{91:13} = \frac{3}{7};\qquad \sqrt{\frac{3^2}{7^2}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{\sqrt{3^2}+\sqrt{39^2}}{\sqrt{7^2}+\sqrt{91^2}} = \frac{3+39}{7+91} = \frac{42}{98} = \frac{3}{7}$$

Bài 44 Viết các số sau: 9; $1\frac{9}{16}$; -64; $4a^2$; $9b$ $(b > 0)$; $-16b$ $(b < 0)$ dưới dạng bình phương của một số hoặc bình phương một tích các số. Có mấy cách viết?

Hướng dẫn:

$9 = (\pm 3)^2$

$$1\frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \left(\pm\frac{5}{4}\right)^2$$

Không có số thực nào bình phương bằng -64

$4a^2 = (\pm 2a)^2$

$9b = (\pm 3\sqrt{b})^2$ $(b > 0)$

$-16b = 16(-b) = (\pm 4\sqrt{b})^2$ ($b < 0$ nên $-b > 0$)

Bài 45 So sánh $\sqrt{37} - \sqrt{14}$ và $6 - \sqrt{15}$

Hướng dẫn:

Ta có:

$\sqrt{37} > 6$, còn $\sqrt{14} < \sqrt{15}$, do đó:

$\sqrt{37} - \sqrt{14} > 6 - \sqrt{15}$

§12. SỐ THỰC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

– Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực.

– Tập hợp các số thực được kí hiệu là R.

– Với hai số thực bất kì x, y ta luôn so sánh được: **hoặc $x < y$ hoặc $x > y$ hoặc $x = y$**

Chú ý: Trong tập hợp các số thực cũng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

B. Các bài toán

Bài 32 Điền dấu $\in$, $\notin$, $\subset$ thích hợp vào ô trống:

$-3 \;\square\; Q$; $\quad -2\frac{1}{3} \;\square\; Z$; $\quad 2 \;\square\; R$

$\sqrt{3} \;\square\; I$; $\quad \sqrt{4} \;\square\; N$; $\quad I \;\square\; R$

Giải

$-3 \;\boxed{\in}\; Q$; $\quad -2\frac{1}{3} \;\boxed{\notin}\; Z$; $\quad 2 \;\boxed{\in}\; R$

$\sqrt{3} \;\boxed{\in}\; I$; $\quad \sqrt{4} \;\boxed{\in}\; N$; $\quad I \;\boxed{\subset}\; R$

Bài 33 So sánh các số thực sau:

a) $\frac{3}{7}$ và 0,(4); $\quad$ b) 2,3(496) và $\frac{47}{20}$

c) 3,21(13) và 3,(2); $\quad$ d) –0,2 và –0,1(9)

Giải

a) $\frac{3}{7} = 0,(42857) < 0,(4)$

b) $\frac{47}{20} = 2,35 > 2,3(496)$

c) $3,2\dot{1}(13) < 3,(2)$

d) $-0,2 < -0,1(9)$

Bài 34 Tính bằng cách hợp lý:

a) $A = (-87,5) + \{(+87,5) + [3,8 + (-0,8)]\}$

b) $B = [9,5 + (-13)] + [(-5) + 8,5]$

c) $C = (-5,85) + \{[41,3 + (-5) + 0,85\}$

Giải

a) $A = (-8,75) + \{(+87,5) + [3,8 + (-0,8)]\}$

$= [(-8,75) + 87,5 + [3,8 + (-0,8] = 3$

b) $B = [9,5 + (-13)] + [(-5) + 8,5]$

$= (9,5 + 8,5) + [(-13) +(-5)] = 18 + (-18) = 0$

c) $C = (-5,85) + \{[41,3 + (-5)] + 0,85\}$

$= (-5,85) + 41,3 + (-5) + 0,85$

$= [(-5,85) + 0,85] + (-5) + 41,3$

$= [(-5) + (-5)] + 41,3$

$= (-10) + 41,3 = 31,3$

C. Luyện tập

Bài 46 Giá trị của biểu thức $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right)$ bằng:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{10}$

Giải

Chọn câu b.

Ta có:

$$\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) : 5 = \left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) : 5$$

$$= \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) : 5 = \frac{2}{4} : 5 = \frac{1}{10}$$

Bài 47 Sắp xếp các số thực sau theo thứ tự từ lớn đến nhỏ:

$-3; -1,7; \sqrt{5}; 0; \pi; 5\frac{3}{6}; \frac{22}{7}$

Hướng dẫn:

Sau khi sắp xếp ta được:

$$5\frac{3}{6} > \frac{22}{7} > \pi > \sqrt{5} > 0 > -1,7 > -3$$

Bài 48 Tìm x biết:

a) $x^2 = 49$ b) $(x-1)^2 = 1\frac{9}{16}$

Hướng dẫn:

a) $x^2 = 49 \quad \Rightarrow x^2 = 7^2 \quad \Rightarrow x = -7; 7$

b) $(x-1)^2 = 1\frac{9}{16} \quad \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\Rightarrow x - 1 = \frac{5}{4}$ hay $x - 1 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{9}{4}$ hay $x = -\frac{1}{4}$

Bài 49 So sánh $\sqrt{37} - \sqrt{14}$ và $6 - \sqrt{15}$

Hướng dẫn:

Ta có $\sqrt{37} > \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{14} < \sqrt{15}$

Do đó:

$$\sqrt{37} - \sqrt{14} > \sqrt{36} - \sqrt{15}$$

Vậy: $\sqrt{37} - \sqrt{14} > 6 - \sqrt{15}$

Bài 50 Với mọi số thực x, và y khác 0 sao cho $x - y = xy$, ta có $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ bằng:

a) $\frac{1}{xy}$ b) $\frac{1}{x-y}$

c) 0 d) -1 e) $y - x$

Hướng dẫn:

Chọn câu d

Ta có: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{x-y} = -\frac{x-y}{xy} = -\frac{xy}{xy} = -1$

Chương II

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Công thức: Hai đại lượng x, y tỉ lệ thuận nếu chúng liên hệ với nhau theo công thức y = kx, trong đó k là hằng số khác 0, gọi là hệ số tỷ lệ.

Chú ý: y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k thì x tỷ lệ thuận với y theo hệ số tỷ lệ $\frac{1}{k}$.

2. Tính chất:

- $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ... = k$
- $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3};...$

B. Các bài toán

Bài 1 Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau. Hãy điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng dưới đây.

x	–5	–1	–2		6,5
y			5	8,75	

Giải

Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận nên x và y liên hệ với nhau theo công thức y = kx.

Theo bảng ta có x = –2 thì y = 5 nên 5 = k (–2)

$\Rightarrow k = \frac{-5}{2}$

Từ đó ta có:

x	–5	–1	–2	–3,5	6,5
y	12,5	2,5	5	8,75	–16,25

Bài 2 Trong hai bảng dưới đây, bảng nào cho ta các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ thuận:

a)

x	−2	−1	0	3	5
y	4	2	0	−6	−10

b)

x	−3	−1	0	2	7
y	1	3,5	−1	−4	−2

Giải

a) Ta có $\frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} = \frac{5}{-10}\left(= -\frac{1}{2}\right)$

nên ta có tương quan tỉ lệ thuận giữa hai đại lượng x và y

b) Ta có: $\frac{-3}{1} = -3$; $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$

nên $\frac{-3}{1} \neq \frac{-1}{2}$

Vậy bảng b không cho ta các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Bài 3 Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, biết hai giá trị x_1 và x_2 của x có hiệu bằng 2 thì hai giá trị tương ứng y_1 và y_2 có hiệu bằng 1.

a) Viết công thức mô tả mối liên hệ giữa x và y.

b) Điền vào bảng giá trị dưới đây:

x	−4		−2	−1	0	1		3	4
y		$\frac{3}{2}$					−1		

Giải

a) Ta có: $a = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

Vậy công thức liên hệ giữa x và y là

$$y = -\frac{1}{2}x$$

b) Ta có bảng sau:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-\frac{3}{2}$	–2

C. Luyện tập

Bài 1 Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận và biết rằng với hai giá trị x_1, x_2 của x có tổng bằng 1 thì hai giá trị tương ứng y_1, y_2 của y có tổng số bằng 5.

a) Viết công thức mô tả sự phụ thuộc của x và y.

b) Điền vào bảng các giá trị dưới đây.

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	2	3
y									

Hướng dẫn:

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận nên:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{1} = 5$$

Công thức liên hệ giữa x và y là y = 5x.

b) Ta có bảng sau:

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	2	3
y	–15	–10	–5	–1	0	1	5	10	15

Bài 2 Quan hệ giữa hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau:

x	5	8	13
y	9	14,4	22,4

Đây có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?

Hướng dẫn:

$\frac{9}{5} = \frac{14,4}{8}$ vì $9 . 8 = 5 . 14,4$

nhưng $\frac{9}{5} = \frac{14,4}{8}$ vì $9 . 13 \neq 5 . 22,4$

Vậy x và y không phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Bài 3 Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận và cho biết hai giá trị x_1, x_2 của x có tổng bằng 2 thì hai giá trị tương ứng y_1, y_2 của y có tổng bằng –2. Viết công thức mô tả mối quan hệ giữa x và y.

Nếu x = –2 thì y bằng bao nhiêu?

Nếu y = –1 thì x bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow y = -x$$

$x = -2 \Rightarrow y = 2$; $y = -1 \Rightarrow x = 1$

Bài 4 Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Tìm hệ số tỉ lệ biết rằng:

a) Với hai giá trị x_1, x_2 của x có tổng bằng 3 thì hai giá trị tương ứng y_1, y_2 của y có tổng bằng –5.

b) Với hai giá trị x_1, x_2 của x có hiệu số bằng 2 thì giá trị tương ứng y_1, y_2 của y có hiệu bằng 3.

Hướng dẫn:

a) $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{-5}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x$

b) $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

§2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Vận dụng các kiến thức sau để giải toán:

– Tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ... = k$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3} ....$$

– Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = ...$$

B. Các bài toán

Bài 4 Tính các góc của tam giác ABC biết A, B, C tỉ lệ với 1, 2, 3 và $A + B + C = 180^0$

Giải

Ta có: $\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} = \frac{A + B + C}{6} = \frac{180^0}{6} = 30^0$

nên $A = 30^0$

$B = 60^0$

$C = 90^0$

Bài 5 Biết các số x, y, z tỉ lệ thuận với các số 5, 3, 2 và $x - y + z = 8$. Tìm các số đó.

Giải

Ta có $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x - y + z}{5 - 3 + 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Vậy $x = 2 . 5 = 10$

$y = 2 . 3 = 6$

$z = 2 . 2 = 4$

Bài 6 Ba lớp 7A. 7B, 7C cùng tham gia lao động trồng cây. Số cây mỗi lớp trồng tỉ lệ với các số 3; 5; 8 và hai lần số cây của lớp 7A cộng với bốn lần số cây của lớp 7B thì hơn số cây của lớp 7C là 108 cây. Tính số cây mỗi lớp trồng được.

Giải

Gọi x, y, z là số cây trồng được của 3 lớp 7A, 7B, 7C. Theo đề bài ta có:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \quad \text{và} \quad 2x + 4y - z = 108$$

Suy ra: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8} = \frac{2x + 4y - z}{6 + 20 - 8} = \frac{108}{18} = 6$

Do đó: $\frac{x}{3} = 6 \quad \Rightarrow x = 18$; $\frac{y}{5} = 6 \quad \Rightarrow y = 30$

$$\frac{z}{8} = 6 \quad \Rightarrow z = 48$$

Vậy lớp 7A trồng được 18 cây; 7B trồng được 3 cây; 7C trồng được 4 cây.

C. Luyện tập

Bài 5 Chia số 490 thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{4}$, 0,03

Hướng dẫn:

Gọi ba phần phải tìm là x, y và z

Theo đầu bài ta có:

$$x + y + z = 490 \quad \text{và} \quad x : y : z = \frac{1}{5} : 1\frac{1}{4} : 0,3$$

Trước hết ta biến đổi tỉ số giữa các phân số thành tỉ số giữa các số nguyên.

Ta có:

$$\frac{1}{5} = 1\frac{1}{4} : 0,03 = \frac{1}{5} : \frac{5}{4} : \frac{3}{10} = \frac{4}{20} : \frac{25}{20} : \frac{6}{20} = 4 : 25 : 6$$

Do đó:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{25} = \frac{z}{6} = \frac{x + y + z}{4 + 25 + 6} = \frac{490}{35} = 14$$

Vậy $x = 14 . 4 = 56$

$y = 14 . 25 = 350$

$z = 14 . 6 = 54$

Bài 6 Tổng kết năm học ở một trường có 25 học sinh lớp 6 và 35 học sinh lớp 7 đạt loại giỏi. Tính số học sinh giỏi ở mỗi khối lớp, biết rằng số học sinh giỏi ở khối 7 nhiều hơn số học sinh giỏi ở khối 6 là 6 học sinh.

Hướng dẫn:

Gọi x, y lần lượt là số học sinh giỏi lớp 7 và lớp 6 ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{35}{25} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{y}{25} = \frac{x-y}{35-25} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Vậy $x = \frac{35.3}{5} = 21$; $y = \frac{25.3}{5} = 15$

Số học sinh giỏi của khối 7 là 21 học sinh.

Số học sinh giỏi của khối 6 là 15 học sinh.

Bài 7 Hai nền nhà có cùng một chiều dài. Chiều rộng của nền thứ nhất bằng 1,2 lần chiều rộng của nền thứ hai. Khi lát gạch bông thì số gạch lát nền thứ nhất nhiều hơn nền thứ hai là 400 viên gạch. Hỏi mỗi nền nhà phải lát bao nhiêu gạch?

Hướng dẫn:

Vì hai nền nhà có cùng chiều dài, nên tỉ số gạch lát của hai nền bằng tỉ số chiều rộng của các nền đó.

Gọi số gạch lát của nền thứ nhất là a, của nền thứ hai là b ta có:

$$\frac{a}{b} = 1{,}2 = \frac{12}{10} \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{10} = \frac{a-b}{12-10} = \frac{400}{2} = 200$$

Suy ra: $a = 200 \,.\, 12 = 2400$ (viên)

$b = 200 \,.\, 10 = 2000$ (viên)

Bài 8 Tìm số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1 : 2 : 3.

Hướng dẫn giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm. Vì mỗi chữ số a, b, c không vượt quá 9 và ba chữ số không thể đồng thời bằng 0 vì khi đó ta không được số có ba chữ số nên:

$$1 \le a + b + c \le 27$$

Mặt khác, số phải tìm là bội của 18, nên $a + b + c = 9$ hoặc $a + b + c = 18$ hoặc $a + b + c = 27$

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=\frac{a+b+c}{6} \text{ do đó } (b+c) \vdots 6$$

nên $a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=\frac{18}{6}=3$

Suy ra $a = 3$; $b = 6$; $c = 9$

Vì số phải tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị của nó phải là số chẵn.

Vậy các số phải tìm là 396; 963.

§3. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Định nghĩa:

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$, với a là một hằng số khác 0 thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

Chú ý: Khi y tỉ lệ nghịch với x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y nên ta nói y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau.

2. Tính chất:

– Tích của một giá trị bất kỳ của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia luôn là một hằng số (bằng hệ số tỉ lệ):

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = ... = a$$

– Tỉ số hai giá trị bất kỳ của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1}{x_3}=\frac{y_3}{y_1},...$$

B. Các bài toán

Bài 7 Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền vào các ô trống trong bảng dưới đây các số thích hợp.

x	–4	–2		0,5	2	8
y		–2	–4			

Giải

Các đại lượng x, y tỉ lệ nghịch nên có công thức tổng quát là $xy = k$.

Theo bảng ta có $x = -2$, thì $y = -2$ nên $k = (-2)(-2) = 4$

Vậy $y = \frac{4}{x}$

Từ đây ta có bảng sau:

x	−4	−2	−1	0,5	2	8
y	−1	−2	−4	8	2	0,5

Bài 8 Bảng dưới đây bảng nào cho các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch?

a)

x	−5	−3	2	4	17
y	−4	−6	11	4,75	1

b)

x	−18	−9	3	4,5	114
y	2	4	−12	−8	−0,25

Giải

a) x và y không phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch

$(-5)(-4) \neq (-3)(-6)$

b) x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch vì

$(-18) . 2 = -9 . 4 = 3 . (-12) = 4,5 . (-8)$

$= 114 . (-0,25) = -86$

Bài 9 Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch và khi $x = -3$ thì $y = 6$

a) Tìm hệ số tỉ lệ nghịch của y đối với x.

b) Hãy biểu diễn y theo x.

c) Tính giá trị của y khi: $x = -15$, $x = 6$.

Giải

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có công thức tổng quát

$$y = \frac{k}{x}$$

Thay x = –3, y = 6 vào ta được

$$6 = \frac{k}{-3} \Rightarrow k = -18$$

b) Với k = –18 ta có $y = \frac{-18}{x}$

c) Khi x = –15 thì $y = \frac{-18}{-15} = 1,2$

Khi x = 6 thì $y = \frac{-18}{6} = -3$

C. Luyện tập

Bài 9 Tìm hai số dương biết tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ nghịch với 35, 210, 12.

Hướng dẫn:

Gọi hai số phải tìm là x, y (x > 0, y > 0, x > y). Ta có:

$$35(x + y) = 210(x - y) = 12xy$$

Chia các tích trên cho BCNN của 35, 210, 12 là 420 ta được:

$$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{xy}{35}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{(x+y)+(x-y)}{12+2} = \frac{(x+y)-(x-y)}{12-2}$$

Suy ra $\frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x} \Rightarrow x = 7; \quad y = 5$

Bài 10 Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y. x_1, x_2 là hai giá trị của x; y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y.

a) Biết $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ và $y_1 + y_2 = 14$

Tính y_1, y_2.

b) Biết $x_2 = 2$, $2x_1 - 3y_2 = 22$ và $y_1 = 5$

Tính x_1, y_2.

Đáp số: a) $y_1 = 6$; $y_2 = 8$

b) $x_1 = -4$, $y_2 = -10$

Bài 11 Chia số 786 thành những phần tỉ lệ nghịch với các số

$0,2; 3\frac{1}{3}; \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn:

Chia 786 thành ba phần x, y, z tỉ lệ thuận với các số nghịch đảo của $0,2; 3\frac{1}{3}; \frac{4}{5}$ tức là:

$x : y : z = 5 : \frac{3}{10} : \frac{5}{4} = 100 : 6 : 25.$

Từ đó tìm được $x = 600$, $y = 36$, $z = 150$

Bài 12 Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y; x_1 và x_2 là hai giá trị của x; y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y.

a) Biết $x_1y_1 = 45$ và $x_2 = 9$. Tính y_2.

b) Biết $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ và $y_1 + y_2 = 12$

Tính y_1 và y_2.

c) Biết $x_2 = 3$, $x_1 + 2y_2 = 18$ và $y_1 = 12$. Tính x_1; y_2.

Hướng dẫn:

x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

a) Suy ra $y_2 = \frac{x_1y_1}{x_2} = \frac{45}{9} = 5$

b) Suy ra $\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \Rightarrow \frac{y_1}{4} = \frac{y_2}{2} = \frac{12}{6} = 2$

Do đó $y_1 = 2 . 4 = 8$, $y_2 = 2 . 2 = 4$

c) Ta có $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2y_2}{2y_1} = \frac{x_1 + 2y_2}{x_2 + 2y_1} \Rightarrow \frac{x_1}{3} = \frac{18}{3 + 2.12}$

$\Rightarrow x_1 = 2$ và $2y_2 = 18 - x_1 = 18 - 2$

$\Rightarrow 2y_2 = 16$

$y_2 = 8$

Vậy $x_1 = 2$; $y_2 = 8$

§4. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Để giải các bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch ta vận dụng các kiến thức:

– Tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch:

$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = ... = a$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_3}{y_1};...$

– Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

– Nếu y tỉ lệ nghịch với x thì y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$.

B. Các bài toán

Bài 10 Chia số 393 thành những phần tỉ lệ nghịch với các số:

$0,2; \quad 3\frac{1}{3}; \quad \frac{4}{5}$

Giải

Ta chia 393 thành ba phần x, y, z tỉ lệ thuận với với các số nghịch đảo của 0,2; $3\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$. Ta có $0,2 = \frac{1}{5}$; $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$; $\frac{4}{5}$.

Do đó theo đề bài ta có:

$x + y + z = 393$

$x : y : z = 5 : \frac{10}{3} : \frac{5}{4} = 100 : 6 : 25$

hay $\frac{x}{100} = \frac{y}{6} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{131} = \frac{393}{131} = 3$

Do đó $\frac{x}{100} = 3 \Rightarrow x = 300$

$\frac{y}{6} = 3 \Rightarrow y = 18$

$\frac{z}{25} = 3 \Rightarrow z = 75$

Bài 11 Một người mua vải để may ba áo sơ mi như nhau. Người ấy mua ba loại vải khổ rộng 0,7m; 0,8m và 1,4m với tổng số vải là 5,7m. Tính số mét vải mỗi loại người ấy đã mua.

Giải

Vì ba áo sơ mi như nhau nên khổ vải tỉ lệ nghịch với chiều dài của vải.

Gọi số mét vải mỗi loại người ấy đã mua là x, y, z (x, y, z > 0)

Ta có: $0,7x = 0,8y = 1,4z$

hay $7x = 8y = 14z$

BCNN (7, 8, 14) = 56 nên $\frac{7x}{56} = \frac{8y}{56} = \frac{14z}{56}$

Suy ra $\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{8+7+4} = \frac{5,7}{19} = 0,3$

Do đó $x = 0,3 \,.\, 8 = 2,4$ (m)

$y = 0,3 \,.\, 7 = 2,1$ (m)

$z = 0,3 \,.\, 4 = 1,2$ (m)

Vậy số mét vải khổ 0,7m là 2,4m; khổ 0,8m là 2,1m; khổ 1,4m là 1,2m.

Bài 12 Tìm hai số dương biết tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ nghịch với 35, 210 và 12.

Giải

Gọi hai số phải tìm là x, y (x > 0, y > 0, x > y).

Theo đề bài ta có:

$$\frac{x+y}{\frac{1}{35}} = \frac{x-y}{\frac{1}{210}} = \frac{xy}{\frac{1}{12}}$$

hay $35(x + y) = 210(x - y) = 12xy$.

Vì BCNN (35; 210; 12) = 420 , nên

$$\frac{35(x+y)}{420} = \frac{210(x-y)}{420} = \frac{12xy}{420}$$

hay $$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{xy}{35} \qquad (1)$$

theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{(x+y)+(x-y)}{12+2} = \frac{(x+y)-(x-y)}{12-2}$$

hay $\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$$

Vì $x > 0$, $y > 0$ nên

$7y = 35 \Rightarrow y = 5$

$5x = 35 \Rightarrow x = 7$

Vậy hai số dương phải tìm là 7 và 5.

C. Luyện tập

Bài 13 Biết rằng 20 người làm xong một công việc trong 5 ngày. Hỏi nếu số người tăng thêm 5 người thì thời gian hoàn thành công việc đó giảm được mấy ngày?

Hướng dẫn:

Gọi thời gian hoàn thành công việc sau khi đã bổ sung thêm người là x ngày:

Ta có: $\frac{20}{20+5} = \frac{x}{5}$

Suy ra $x = \frac{20.5}{25} = 4$

Thời gian hoàn thành công việc 4 ngày, giảm 1 ngày.

Bài 14 Hai xe ôtô cùng khởi hành một lúc từ A và B. Xe thứ nhất đi từ A đến B hết 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A hết 3 giờ. Đến chỗ gặp nhau, xe thứ hai đi được một quãng đường dài hơn quãng đường xe thứ nhất đã đi là 35 km. Tính quãng được AB.

Hướng dẫn:

Ta có:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$

$S_2 - S_1 = 35$

$$\frac{S_1}{3} = \frac{S_2}{4} = \frac{S_2 - S_1}{4-3} = \frac{35}{1} = 35$$

Đáp số: Quãng đường AB dài 245 (km).

Bài 15 Ba máy cày cày được 35,9 ha. Số ngày làm việc của các máy tỉ lệ theo 3:4:5, số giờ làm việc hàng ngày của các máy tỉ lệ theo 6:7:8 còn công suất của các máy tỉ lệ nghịch với 5:4:3. Hỏi mỗi máy cày được bao nhiêu hecta?

Hướng dẫn:

Gọi x, y, z là số hecta đất mà mỗi máy cày đã cày được. Theo đề bài ta phải chia số 35,9 thành ba phần tỉ lệ với 3, 4, 5 và với 6, 7, 8 đồng thời tỉ lệ nghịch với 5, 4, 3. Từ đó suy ra:

$$x : y : z = \frac{18}{5} : 7 : \frac{40}{3} \text{ hay}$$

$$\frac{x}{\frac{18}{5}} = \frac{y}{7} = \frac{z}{\frac{40}{3}} = \frac{x+y+z}{\frac{18}{5}+7+\frac{40}{3}} = \frac{35{,}9}{\frac{359}{15}} = 1{,}5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}5.\dfrac{18}{5} = 5{,}4 \\ y = 1{,}5.7 = 10{,}5 \\ z = 1{,}5.\dfrac{40}{3} = 20 \end{cases}$$

Vậy x = 5,4; y = 10,5 ; z = 20. Số hecta đất mỗi máy cày được là 5,4 ha; 10,5 ha và 20 ha.

§5. HÀM SỐ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Hàm số:

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho: với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.

2. Chú ý:

– Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

– Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức...

– Để thuận tiện ta có thể kí hiệu công thức ở vế phải của hàm số bằng f(x), g(x)...

B. Các bài toán

Bài 13 Hàm số f được cho bởi bảng sau:

x	−4	−3	−2	1	3,5	0
y	8	6	4	−2	−7	0

a) Tính : f(−4); f(−2); f(1); f(3,5)

b) Hàm số f được cho bởi công thức nào?

Giải

a) Theo bảng ta có:

$f(-4) = 8$; $f(-2) = 4$

$f(1) = -2$; $f(3,5) = -7$

b) Ta có $\frac{8}{-4} = \frac{6}{-3} = \frac{4}{-2} = ... = -2$.

Vậy hàm số f được cho bởi công thức $y = -2x$

Bài 14 Cho hàm số $y = -3x$. Tìm các giá trị của x sao cho

a) y nhận giá trị dương.

b) y nhận giá trị âm.

Giải

a) y nhận giá trị dương thì ta có:

$y = -3x > 0$ Suy ra $x < 0$

b) y nhận giá trị âm với $x > 0$

Bài 15 Hàm số f được cho bởi công thức sau:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq 0 \\ 1 - 2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tính $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(-\frac{1}{2})$.

Giải

Ta có $2 > 0$ nên $f(2) = 2 + 1 = 3$

$-2 < 0$ nên $f(-2) = 1 - 2.(-2) = 5$

$f(0) = 0 + 1 = 1$

$-\frac{1}{2} < 0$ nên $f(-\frac{1}{2}) = 1-2.(-\frac{1}{2}) = 2$

C. Luyện tập

Bài 16 Cho các hàm số:

$f_1(x) = 3x^2$; $f_2(x) = -5x$; $f_3(x) = 2$

a) Tính $f_1(\frac{1}{3})$; $f_2(\frac{1}{5})$; $f_3(3)$

b) Tính $f_1(0) + f_2(1) + f_3(-1)$

Hướng dẫn giải

a) $f_1(\frac{1}{3}) = 3.(\frac{1}{3})^2 = 3.\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

$f_2(\frac{1}{5}) = 5.(\frac{1}{5}) = -1$

$f_3(3) = 2$

b) $f_1(0) = f_2(1) + f_3(-1) = 3 . 0^2 + (-5) . 1 + 2$

$= -5 + 2 = -3$

Bài 17 Cho hàm số f xác định bởi công thức:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ nếu } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x \text{ nếu } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

a) Hàm số f có thể được viết gọn bằng công thức nào?

b) Tính $f(\frac{2}{3})$; $f(-1)$; $f(0)$

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = |2x - 3|$

b) $f(\frac{3}{2}) = -1\frac{2}{3}$; $f(-1) = 5$; $f(0) = 3$

Bài 18 Hàm số f được xác định như sau: cho ứng mỗi số (tự nhiên) có hai chữ số ta được hàm số f là tổng các chữ số của nó:

Tính f(12), f(29), f(73). Tìm x biết f(x) = 5.

Chỉ ra tập hợp các số x và tập hợp các số y của hàm số trên.

Hướng dẫn giải

$f(12) = 1 + 2 = 3$; $f(29) = 2 + 9 = 11$

$f(73) = 7 + 3 = 10$

Nếu $f(x) = 5$ thì $x = 14, 41, 23, 32, 50$

Tập hợp các số x là $10 \le x \le 99$

Tập hợp các số y là $1 \le y \le 18$

Bài 19 Cho hàm số $y = x^2 + 2$. Tìm câu đúng trong các câu sau đây:

a) $f(-1) = 1$

b) $f(\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{4}$

c) $f(-\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4}$

d) $f(1) = 3$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = x^2 + 2$ nên

$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$ nên a sai

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{1}{4}$ nên b sai

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{1}{4}$ nên c sai

$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$ nên d đúng.

Vậy chọn câu d.

Bài 20 Cho f(x) là một hàm số khác 0 sao cho với mọi a, b

$f(a + b) + f(a - b) = 2f(a) + 2f(b)$

Thế thì với mọi x, y ta có:

a) $f(0) = 1$

b) $f(-x) = -f(x)$

c) $f(-x) = f(x)$

d) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Hướng dẫn giải

Chọn câu c

Cho a = b = 0: $2f(0) = 4f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

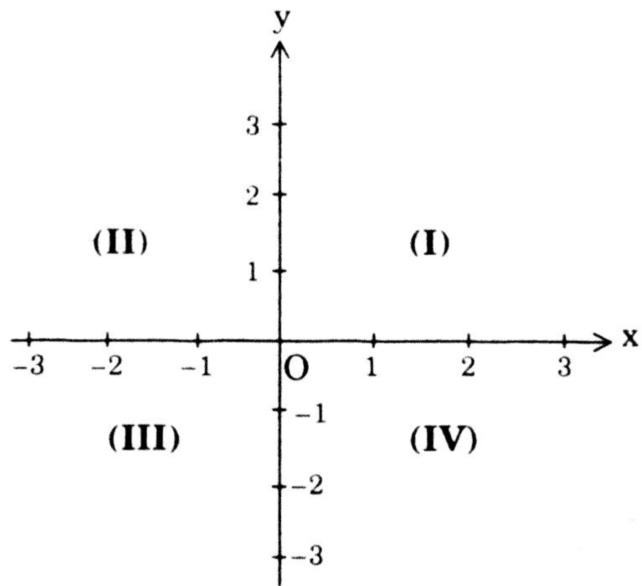
Cho a = 0 và b = x: $f(x) + f(-x) = 2f(0) + 2f(x)$.

$\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

§6. MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Mặt phẳng tọa độ: Mặt phẳng tọa độ Oxy (hay hệ tọa độ Oxy) gồm hai trục số đặt vuông góc với nhau: trục hoành Ox và trục tung Oy. Điểm O là gốc tọa độ. Mặt phẳng tọa độ được chia thành bốn góc phần tư theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ.



2. Tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ: Trên mặt phẳng tọa độ:

– Mỗi điểm M xác định một cặp số (x_0, y_0) ngược lại mỗi cặp số (x_0, y_0) xác định một điểm M.

– Cặp số (x_0, y_0) gọi là tọa độ của điểm M, x_0 là hoành độ và y_0 là tung độ của điểm M.

– Điểm M có tọa độ (x_0, y_0) được kí hiệu là M $(x_0; y_0)$.

B. Các bài toán

Bài 16 Các điểm sau đây có trùng nhau không?

a) A (3; 4) ; B (4; 3)

b) C (1; 2) ; D (1; 2)

c) M (a; b) ; N (b; a)

Giải

a) A và B không trùng nhau vì có $(3; 4) \neq (4; 3)$

b) C và D trùng nhau vì $(1; 2) = (1; 2)$

c) Ta xét hai trường hợp:

+ Nếu $a = b$ thì $(a;b) = (b;a)$ nên M và N trùng nhau.

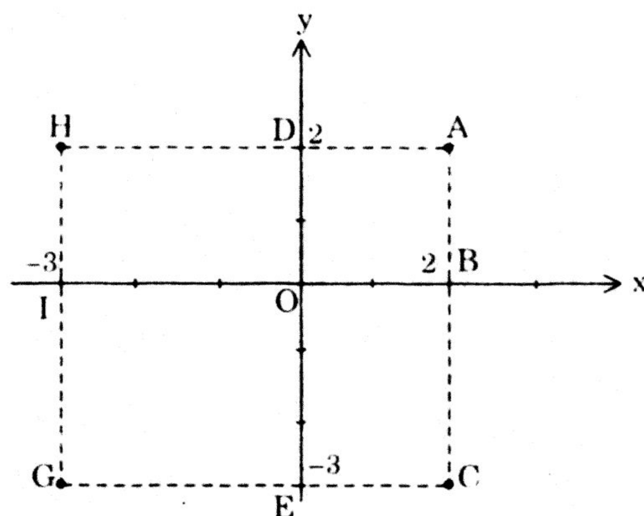
+ Nếu $a \neq b$ thì $(a;b) \neq (b;a)$ nên M và N không trùng nhau.

Bài 17 Hãy viết tất cả các cặp số được lập lên từ các số hữu tỉ 2, 0 và −3. Xác định vị trí các điểm biểu diễn của các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ.

Giải

Từ các số 2, 0 và −3 ta lập được tất cả chín cặp số sau: (2;2), (2;0), (2;−3), (0;0); (0;2), (0;−3), (−3;−3), (−3;2), (−3;0).

Chúng được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ theo thứ tự bởi các điểm A, B, C, D, E, F, G, H, I.



Bài 18 Tìm trên mặt phẳng tọa độ Oxy tất cả các điểm có:

a) Hoành độ bằng 0

b) Tung độ bằng 0

c) Hoành độ bằng 1

d) Tung độ bằng −2

e) Hoành độ bằng số đối của tung độ

g) Hoành độ bằng tung độ

Giải

a) Tất cả các điểm nằm trên trục tung Oy

b) Tất cả các điểm nằm trên trục hoành Ox

c) Tất cả các điểm nằm trên đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm 1.

d) Tất cả các điểm nằm trên đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm −2

e) Tất cả các điểm nằm trên đường thẳng chứa các tia phân giác của góc phần tư II và IV.

g) Tất cả các điểm nằm trên đường thẳng chứa các tia phân giác của góc phần tư I và III

Ghi nhớ:

– Trục tung Oy là tập hợp các điểm có hoành độ bằng 0.

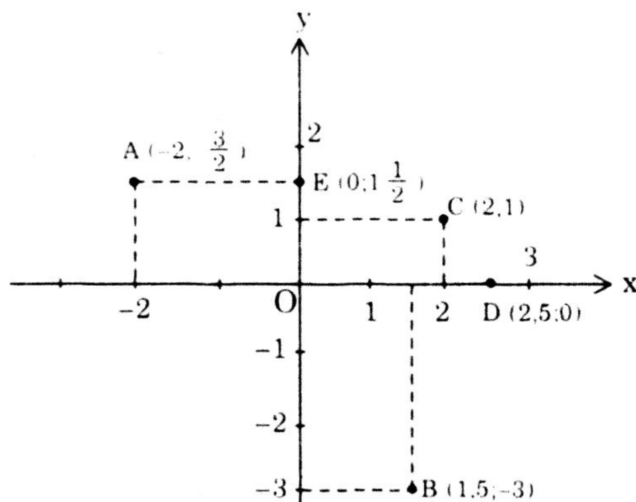
– Trục hoành Ox là tập hợp các điểm có tung độ bằng 0.

C. Luyện tập

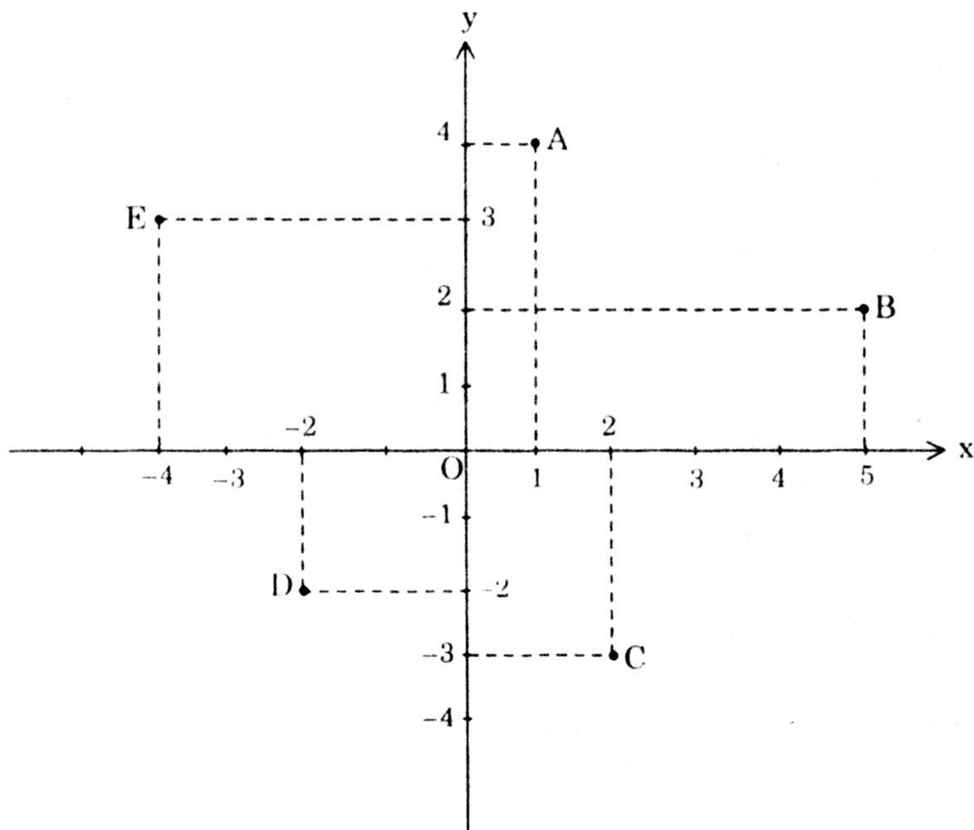
Bài 21 Vẽ một hệ trục tọa độ và đánh dấu vị trí các điểm:

$$A\left(-2;\frac{3}{2}\right);\ B\,(1{,}5;-3);\ C\,(2;1);\ D\,(2{,}5;0);\ E\left(0;1\frac{1}{2}\right)$$

Hướng dẫn giải



Bài 22 Xác định tọa độ các điểm A, B, C, D, E trên mặt phẳng tọa độ Oxy được cho ở hình vẽ sau:



Hướng dẫn giải

Ta có: A(1;4) ; B(5;2) ; C(2;–3)

D(–2;–2) ; E(–4;3)

Bài 23 Trên hệ trục tọa độ Oxy lấy điểm A.

Điểm A (x,y) nằm ở góc phần tư nào, nếu:

a) $x > 0$, $y > 0$

b) $x > 0$, $y < 0$

c) $x < 0$, $y > 0$

d) $x < 0$, $y < 0$

Hướng dẫn giải

a) Nếu $x > 0$, $y > 0$ thì A(x,y) ở góc phần tư I

b) Nếu $x > 0$, $y < 0$ thì A(x,y) ở góc phần tư IV

c) Nếu $x < 0$, $y > 0$ thì A(x,y) ở góc phần tư II

d) Nếu $x < 0$, $y < 0$ thì A(x,y) ở góc phần tư III

Bài 24 Cho điểm P(a;b). Các số a, b phải có điều kiện gì để:

a) P nằm trong góc phần tư II

b) P nằm trên trục hoành

c) P nằm trên trục tung

d) P trùng với góc tọa độ

e) P nằm trên đường thẳng chứa các tia phân giác của góc phần tư II và IV

g) P nằm trên đường thẳng chứa tia phân giác của góc I hoặc đường thẳng chứa tia phân giác của góc II

Hướng dẫn:

a) $a < 0$, $b > 0$; b) a bất kỳ, $b = 0$

c) $a = 0$, b bất kỳ; d) $a = b = 0$

e) $a = b$; g) $|a| = |b|$

§7. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ $(a \neq 0)$

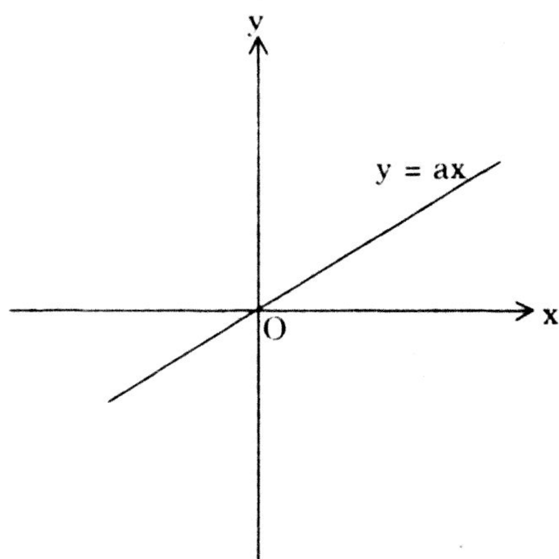
A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đồ thị của hàm số:

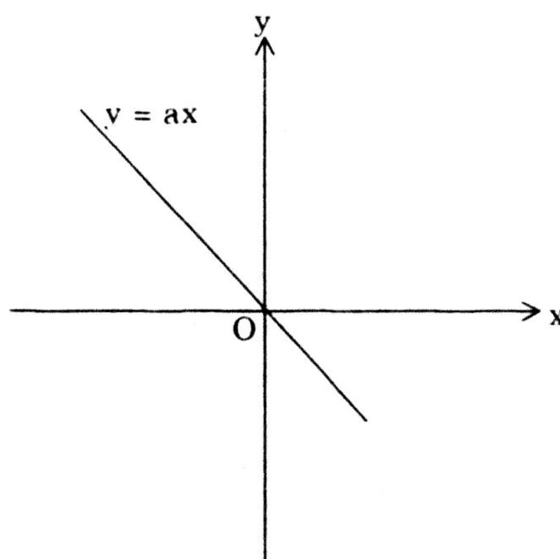
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x;y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$

Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.



a > 0



a < 0

* Vì đồ thị của hàm số $y = ax$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ nên ta chỉ cần xác định thêm một điểm A (thường cho $x = 1$; $y = a$) khác điểm gốc O. Vẽ đường thẳng OA ta được đồ thị của hàm số $y = ax$.

B. Các bài toán

Bài 19 Xác định hệ số a của hàm số $y = ax$ biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(1;3)$; điểm $B(-2;1)$. Cho biết hàm số trong mỗi trường hợp trên đi qua gốc nào của hệ trục tọa độ, tại sao?

Giải

Hàm số đi qua điểm $A(1;3)$ nên ta có:

$$3 = a \cdot 1 \quad \Rightarrow a = 3$$

Vậy $\quad y = 3x$

Tương tự, hàm số đi qua điểm B(−2;1), ta có:

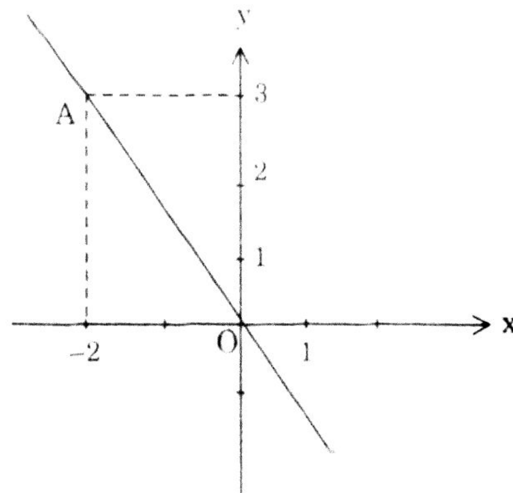
$$-2 = a\ .\ 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

Vậy $y = -\frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số $y = 3x$ ở góc I và III

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$ ở góc II và IV

Bài 20 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là những điểm nằm trên đường thẳng OA như hình vẽ:



a) Viết công thức xác định hàm số

b) Điền vào ô trống trong bảng giá trị của hàm số ứng với giá trị của các biến số.

x	−1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4
f(x)						

Giải

a) Hàm số có dạng $y = ax$, với A(−2;3)

ta được $3 = a\,(-2)$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

b) Ta có công thức $y = -\frac{3}{2}x$. Từ đó ta tìm được bảng sau.

x	−1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4
f(x)	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{9}{4}$	−6

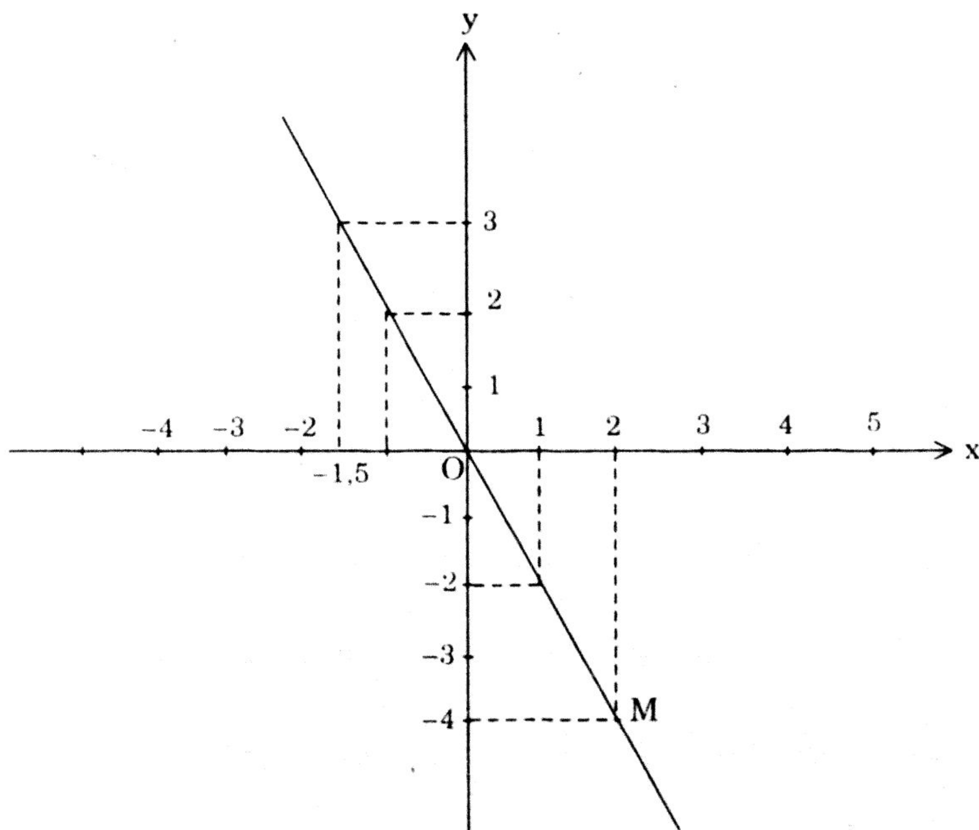
Bài 21 Cho biết hàm số y = f(x) có đồ thị là những điểm nằm trên đường thẳng OM (hình dưới)

a) Tìm trên đồ thị điểm có hoành độ bằng 1

b) Tìm trên đồ thị điểm có tung độ bằng 3.

c) Viết công thức xác định hàm số.

Giải



a) Điểm có hoành độ bằng −1 là (−1;2)

b) Điểm có tung độ bằng 3 là (−1,5; 3)

c) Công thức tổng quát của đồ thị hàm số là y = ax.

Đồ thị đi qua điểm A(−1;2) nên ta có:

$2 = a(-1) \Rightarrow a = -2$

Vậy công thức xác định hàm số là:

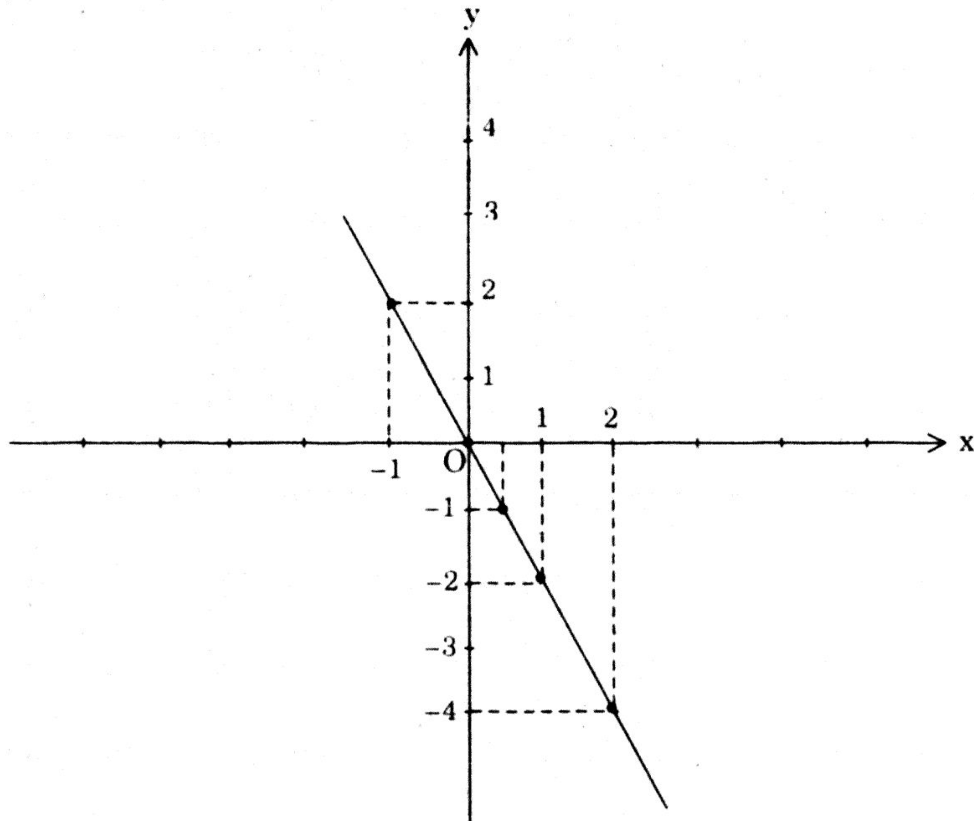
y = −2x.

C. Luyện tập

Bài 25 Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x$. Tìm trên đồ thị những điểm có tung độ bằng -1; 2; -4.

Hướng dẫn giải

Vẽ đồ thị: Cho $x = 1$ ta được $y = -2$ nên điểm $A(1;-2)$ thuộc đồ thị.



Điểm có tung độ bằng -1 thì hoành độ là $\frac{1}{2}$.

Điểm có tung độ bằng 2 thì hoành độ là -1.

Điểm có tung độ bằng -4 thì hoành độ là 2.

Bài 26 Vẽ đồ thị của hàm số:

$$y = \begin{cases} 3x \text{ với } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x \text{ với } x < 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

• Với $x \geq 0$

Cho $x = 0$ được $y = 0$

$\Rightarrow O(0;0)$ thuộc đồ thị

Cho x = 1 được y = 3

⇒ A(1;3) thuộc đồ thị

Đồ thị là tia OA

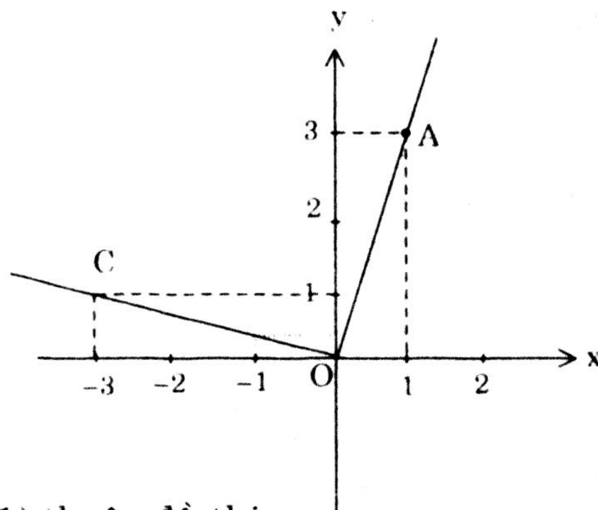
• Với x < 0

Cho x = − 1

được $y = \frac{1}{3} \Rightarrow B(-1;\frac{1}{3})$

thuộc đồ thị

Cho x = − 3 được y = 1 ⇒ C(−3;1) thuộc đồ thị.



Đồ thị là tia OC trừ điểm gốc O.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho là hai nửa đường thẳng OA, OC như hình vẽ.

Bài 27 Biết rằng hàm số y = f(x) có đồ thị là tia OB, CD và điểm A (hình sau).

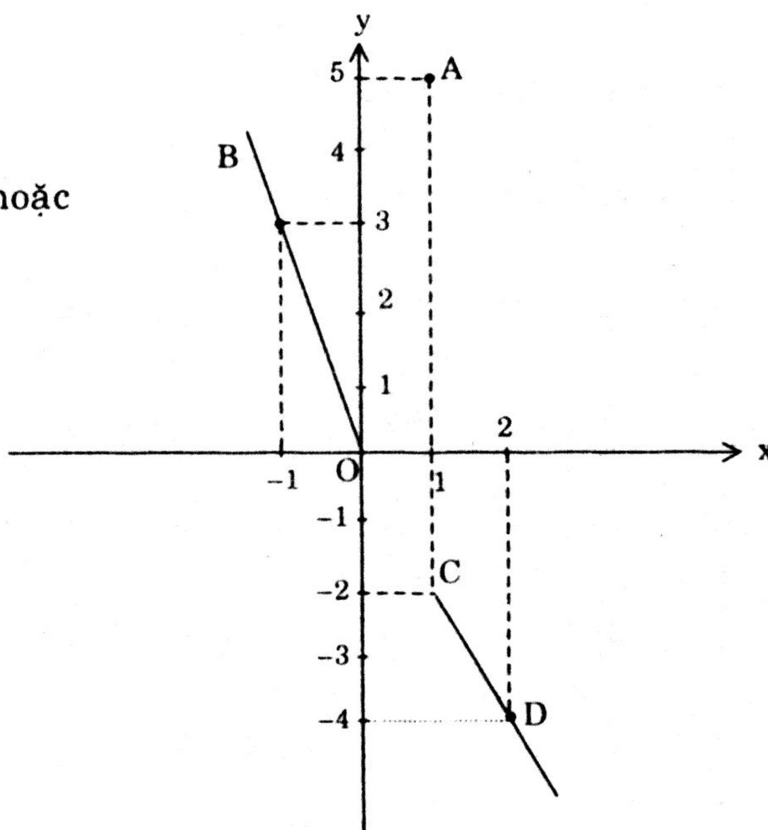
Hãy viết công thức xác định hàm số.

Hướng dẫn giải

y = − 2x và x < 0 hoặc

y = 5, x = 1 hoặc

y = −2x và x > 1

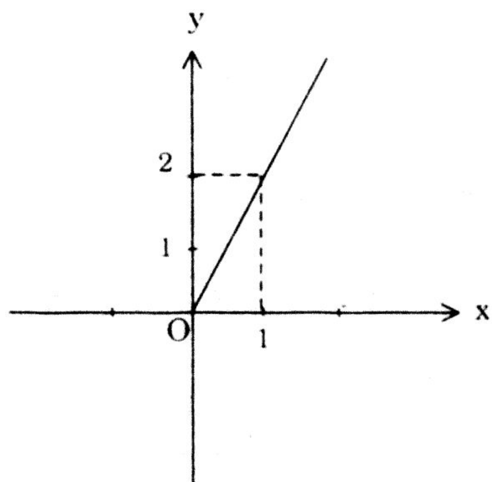


Bài 28 Một hàm số được cho bởi điều kiện sau:

$y = 0$ với $x < 0$

$y = 2x$ với $x \geq 0$

Hãy cho hàm số này bằng một biểu thức và vẽ đồ thị của nó.



Hướng dẫn giải

$$y = x + |x|$$

Chương III

THỐNG KÊ

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ – TẦN SỐ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

– Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê. Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu.

- Dấu hiệu được kí hiệu bằng các chữ in hoa X, Y...
- Giá trị của dấu hiệu thường được kí hiệu là x.

– Số tất cả các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu bằng số các đơn vị điều tra, kí hiệu là N.

– Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu là tần số của giá trị đó, kí hiệu là n.

* *Chú ý*:

Cần phân biệt n (tần số của một giá trị) với N (số các giá trị); X (kí hiệu đối với dấu hiệu) và x (kí hiệu đối với giá trị của dấu hiệu).

B. Các bài toán

Bài 1 Điều tra về sự tiêu thụ điện năng (KW/giờ) của 20 gia đình của một tổ dân phố, kết quả như sau:

103	180	215	190	190
90	103	90	190	90
215	90	215	90	180
103	98	90	215	190

a) Cho biết dấu hiệu cần tìm hiểu? Số tất cả giá trị của dấu hiệu.

b) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau và tìm tần số của chúng.

Giải

a) Dấu hiệu: số KW điện năng tiêu thụ.

Có tất cả 20 giá trị của dấu hiệu.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 90, 98, 103, 180, 190, 215 nên số các giá trị khác nhau là 6. Tần số tương ứng của các giá trị trên là 6, 1, 3, 2, 4, 4.

Bài 2 Đội tuyển học sinh giỏi toán của một trường dự thi đạt điểm như sau:

7, 12, 8, 8, 10, 18, 19, 17, 8, 18. Cho biết:

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ? Số tất cả các giá trị của dấu hiệu.

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu?

c) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số cua chúng.

Giải

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là điểm thi của mỗi học sinh.

Số tất cả các giá trị của dấu hiệu: có tất cả 10 giá trị.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 7, 8, 10, 12, 17, 18, 19. Vậy số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 7.

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 7, 8, 10, 12, 17, 18, 19. Tần số tương ứng của các giá trị trên lần lượt là: 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1.

Bài 3 Một người ghi lại số lượng nước tiêu thụ (tính theo m^3) trong một xóm gần 15 hộ để làm hóa đơn thu tiền. Kết quả ghi như sau:

28	35	41	27	30
45	30	25	28	24
50	45	41	25	30

a) Cho biết dấu hiệu là gì? Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của từng giá trị đó.

b) Bảng số liệu này còn thiếu sót gì và cần phải lập bảng như thế nào?

Giải

a) Dấu hiệu: Số m^3 nước tiêu thụ của từng hộ.

Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 25, 27, 28, 30, 35, 41, 45, 50.

Tần số tương ứng của các giá trị trên lần lượt là: 1, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1.

b) Bảng số liệu này còn thiếu tên các chủ hộ của từng hộ để từ đó mới làm được hóa đơn thu tiền.

Vậy người đó phải lập danh sách các chủ hộ theo một cột tương ứng với từng hộ thì mới làm hóa đơn thu tiền cho từng hộ được.

C. Luyện tập

Bài 1 Điều tra số con của 40 gia đình trong 1500 gia đình của phường A có bảng số liệu ban đầu sau:

4	1	2	2	0	2	1	0	2	3
2	2	2	3	1	3	5	2	1	0
1	2	2	2	3	4	2	1	0	1
0	3	4	2	1	2	2	1	1	0

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì? Số tất cả các giá trị của dấu hiệu.

b) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau và tìm tần số của chúng.

Hướng dẫn:

a) Dấu hiệu: số con

Số tất cả các giá trị của dấu hiệu là 40.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Số các giá trị khác nhau là 6.

Tần số tương ứng là 6, 10, 15, 5, 3, 1.

Bài 2 Số lượng học sinh nữ của từng lớp trong một trường trung học cơ sở được ghi lại trong bảng dưới đây:

18	14	20	17	25	14
19	20	16	18	14	16

Cho biết:

a) Dấu hiệu là gì? Số tất cả các giá trị của dấu hiệu.

b) Nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của từng giá trị đó.

Hướng dẫn giải

a) Dấu hiệu: Số học sinh nữ trong mỗi lớp có tất cả 12 giá trị.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 14, 16, 17, 18, 19, 20, 25.

Tần số tương ứng của giá trị trên lần lượt là: 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1.

§2. BẢNG "TẦN SỐ" CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

– Từ bảng thu thập số liệu ban đầu có thể lập bảng "tần số" (bảng phân phối thực nghiệm).

– Bảng "tần số" giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và tiện lợi cho việc tính toán sau nầy. Nghĩa là:

+ Dấu hiệu chỉ lấy những giá trị khác nhau nào trong dãy giá trị.

+ Mỗi giá trị khác nhau đó xuất hiện bao nhiêu lần trong cả quá trình điều tra.

B. Các bài toán

Bài 4 Số con trong 30 gia đình ở một xóm được thống kê trong bảng sau:

0	2	2	2	4	2	3	4	2	5
1	1	5	4	3	3	2	1	3	2
2	2	4	2	3	2	1	2	2	1

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ? Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

b) Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét (giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu).

Giải

a) Dấu hiệu: số con của một gia đình.

Số các giá trị là 30. Số các giá trị khác nhau là 6.

b) Bảng "tần số".

Số con của một gia đình	0	1	2	3	4	5	
Tần số (n)	1	5	12	6	4	2	N = 30

Nhận xét:

– số con của một gia đình lớn nhất là 5.

– Số con của một gia đình nhỏ nhất là 0.

– Giá trị 2 có tần số lớn nhất là 12.

Các giá trị (Số con của một gia đình) thuộc vào khoảng từ 1 đến 3.

Số gia đình có 2 con chiếm tỉ lệ cao nhất.

Bài 5 Tuổi nghề (tính theo năm) của 30 công nhân trong một tổ sản xuất được thống kê như sau:

4	2	5	4	2	8	5	7	8	10
1	9	4	2	9	7	4	3	5	4
8	7	14	4	5	6	7	5	3	7

a) Dấu hiệu là gì? Số các giá trị khác nhau là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số", rút ra một số nhận xét (giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu).

Giải

a) Dấu hiệu: tuổi nghề của một công nhân có các giá trị khác nhau là 11

b) Bảng tần số:

Tuổi nghề của mỗi công nhân	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14	
Tần số (n)	1	3	2	6	5	1	5	3	2	1	1	N = 30

Tuổi nghề thấp nhất là 1

Tuổi nghề cao nhất là 14

Khó có thể nói là tuổi nghề của một số đông công nhân thuộc vào một khoảng nào.

C. Luyện tập

Bài 3 Để khảo sát kết quả học toán của lớp 7A, người ta kiểm tra 10 học sinh của lớp. Điểm kiểm tra được ghi lại như sau:

4, 4, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10.

a) Dấu hiệu là gì? Số các giá trị khác nhau là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" theo hàng ngang và theo cột dọc. Nêu nhận xét (giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất).

Hướng dẫn giải

a) Dấu hiệu: Điểm bài kiểm tra toán số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 5.

b) Bảng "tần số theo hàng ngang"

Điểm kiểm tra Toán	4	5	6	8	10	
Tần số (n)	2	1	3	3	1	N = 10

Bảng "tần số" theo cột dọc:

Điểm kiểm tra Toán	Tần số (n)
4	2
5	1
6	3
8	3
10	1
	N = 10

Nhận xét: Điểm kiểm tra cao nhất là 10

Điểm kiểm tra thấp nhất là 4

Bài 4 Cho bảng "tần số"

Giá trị	5	10	15	20	25	
Tần số (n)	1	2	12	3	2	N = 20

Từ bảng này viết lại một bảng số liệu ban đầu.

Hướng dẫn giải

Có thể viết một bảng số liệu ban đầu như sau:

15	15	25	20	5	15	10	25	15	20
20	15	15	15	10	15	15	15	15	15

Bài 5 Bạn Nam đếm các chữ cái trong dòng chữ "Ngàn hoa việc tốt dâng lên cô thầy" để cắt khẩu hiệu bằng cách lập bảng thống kê các chữ cái với tần số xuất hiện của chúng. Số các chữ cái xuất hiện từ ba lần trở lên là:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

Hướng dẫn giải

Chọn câu C.

Ta có bảng thống kê sau:

N	G	A	H	O	V	I	E	C	T	D	L	Y
4	2	4	2	3	1	1	2	2	3	1	1	1

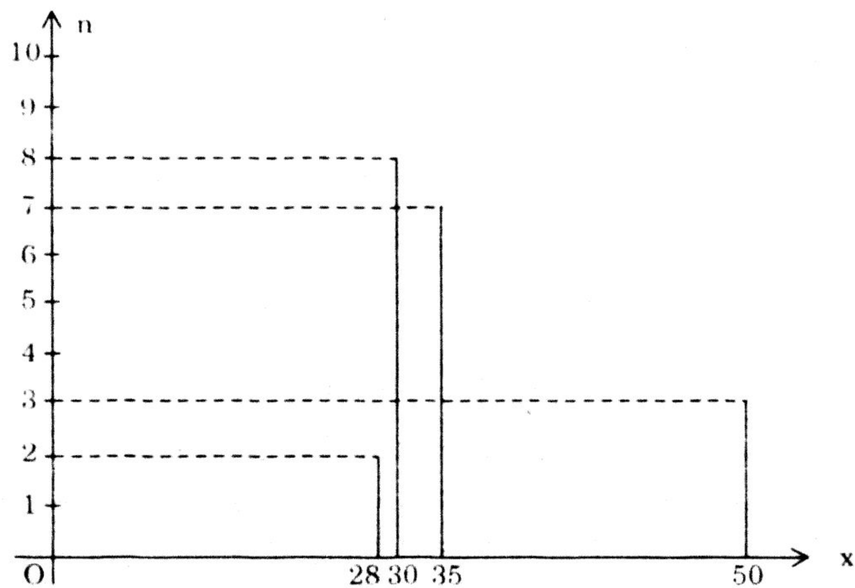
Các chữ cái xuất hiện từ ba lần trở lên là N, A, O, T.

§3. BIỂU ĐỒ

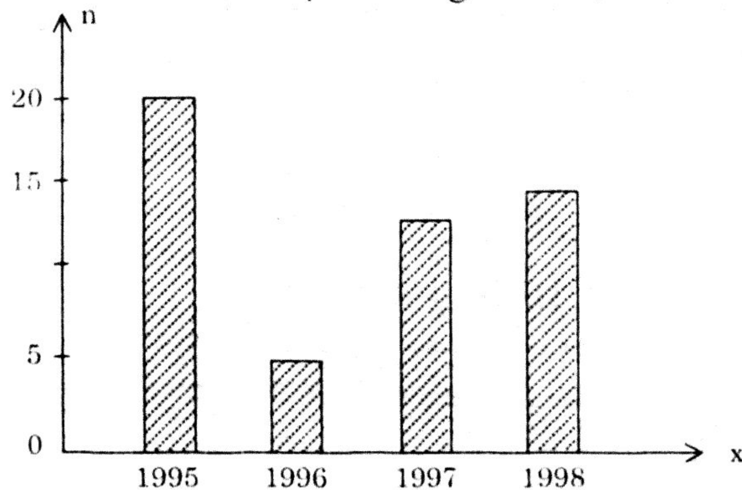
A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

- Ngoài bảng số liệu thống kê ban đầu, bảng "tần số", người ta còn dùng biểu đồ để cho một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số.

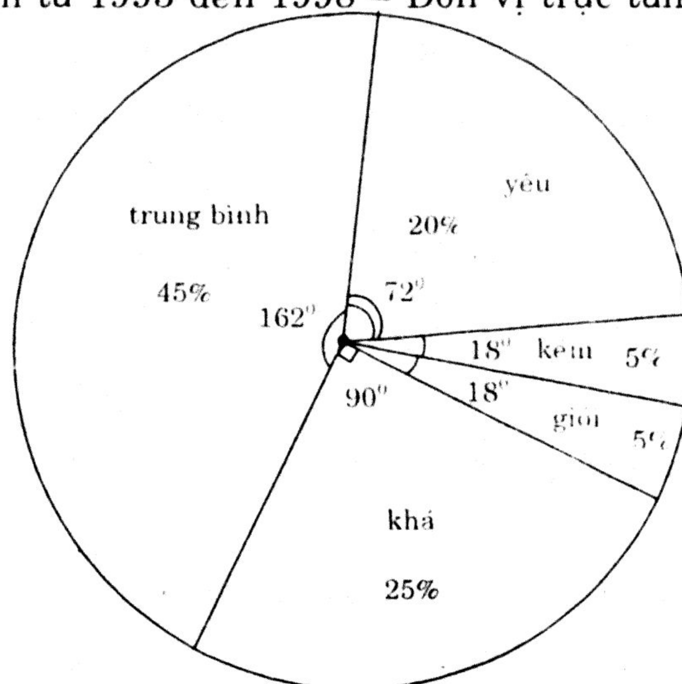
  Có các loại biểu đồ như sau: biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.



Biểu đồ đoạn thẳng (Biểu diễn số cây trồng được của mỗi lớp từ khối 6 đến khối 9 của một trường THCS).



Biểu đồ hình chữ nhật. (Biểu diễn diện tích rừng nước ta bị phá từng năm từ 1995 đến 1998 – Đơn vị trục tung 1000 ha)



Biểu đồ hình quạt. (Biểu diễn kết quả phân loại học tập của học sinh khối 7).

Tần suất: Ngoài tần số của một giá trị của dấu hiệu, người ta còn tính tần suất của giá trị đó theo công thức:

$$f = \frac{n}{N} \quad \begin{cases} n : \text{tần số của một giá trị} \\ f : \text{tần suất của giá trị} \\ N : \text{số tất cả các giá trị.} \end{cases}$$

3– Các bài toán

Bài 6 Điều tra tỉ lệ nữ sinh với toàn bộ số học sinh trong 35 trường trung học cơ sở (tính theo phần trăm) người ta được kết quả dưới đây:

25	32	27	37	42	50	40
69	69	64	59	54	59	37
25	69	64	40	42	50	35
56	35	56	32	47	37	27
49	43	47	47	54	49	56

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm giá trị X (tỉ lệ nữ sinh so với tổng số học sinh trong một trường)

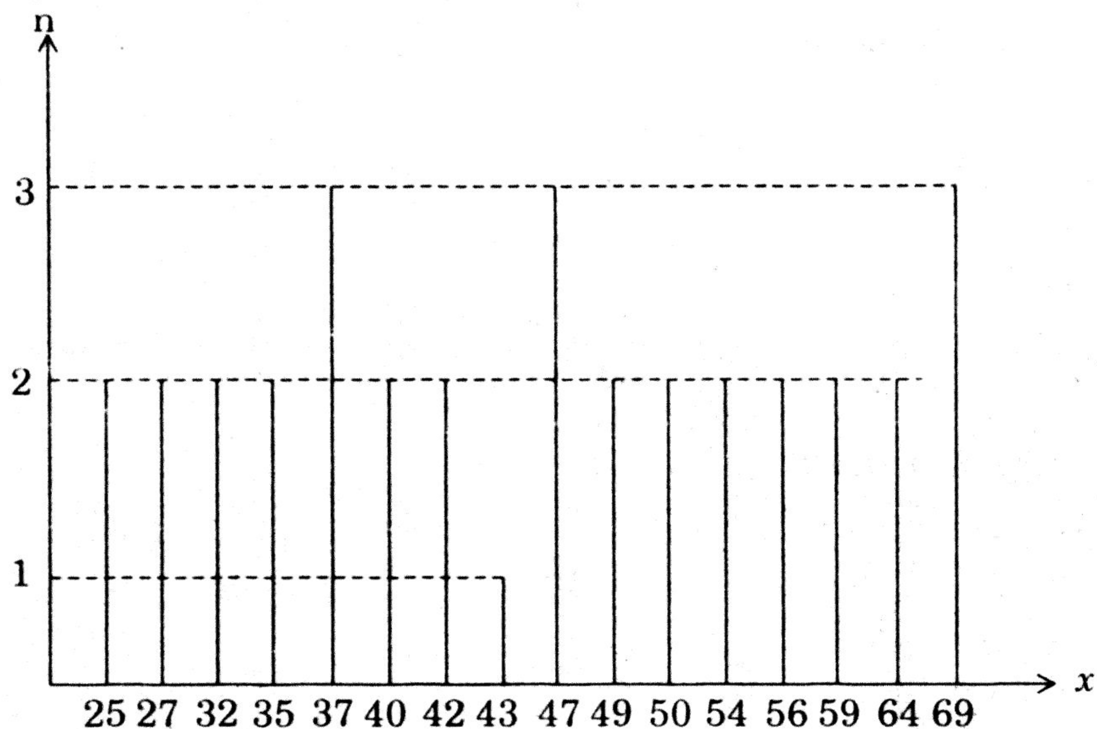
b) Dựng biểu đồ cột đứng.

Giải

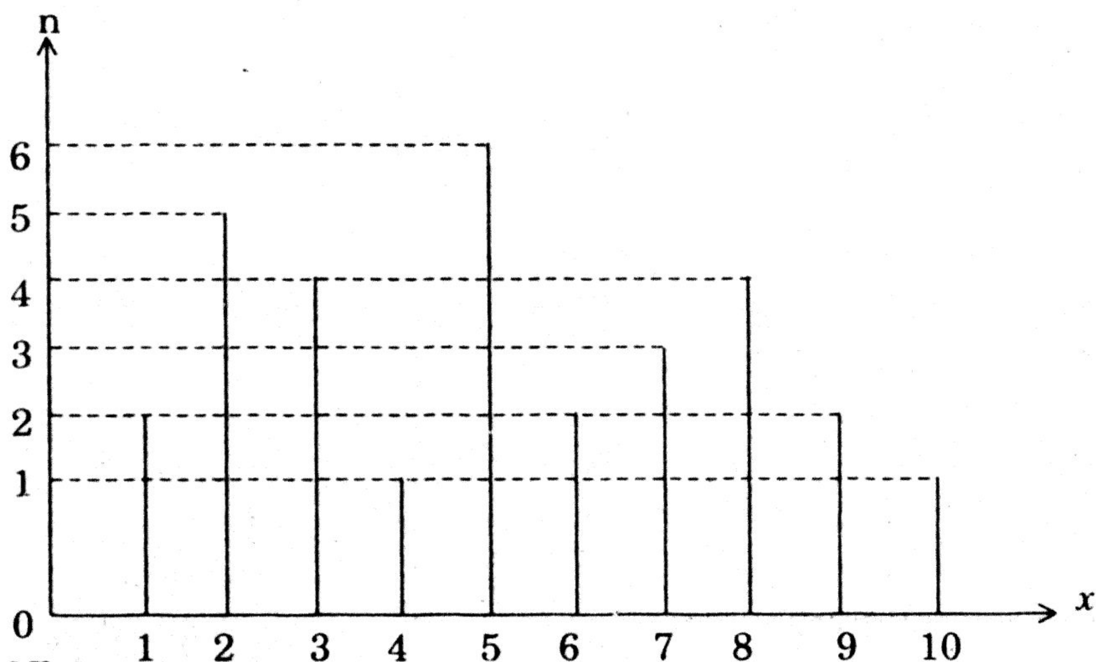
a) Bảng phân phối thực nghiệm ("tần số") của giá trị X (tỉ lệ nữ sinh so với tổng số học sinh trong một trường)

Tỉ lệ nữ sinh	25	27	32	35	37	40	42	43	47	49	50	54	56	59	64	69
Tần số (n)	2	2	2	2	3	2	2	1	3	2	2	2	2	2	2	3

b) Dựng biểu đồ cột đứng.



Bài 7 Biểu đồ sau biểu diễn số lỗi chính tả trong một bài tập làm văn của các học sinh lớp 7B. Từ biểu đồ đó hãy:



a) Nhận xét.

b) Lập lại bảng "tần số".

Giải

a) Có 7 học sinh mắc 5 lỗi, 6 học sinh mắc 2 lỗi, 5 học sinh mắ 8 lỗi.

Đa số học sinh mắc từ 1 đến 3 lỗi và từ 5 đến 9 lỗi. (36 họ sinh)

b) Bảng "tần số"

Số lỗi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	3	6	5	2	7	3	4	5	3	2	N = 40

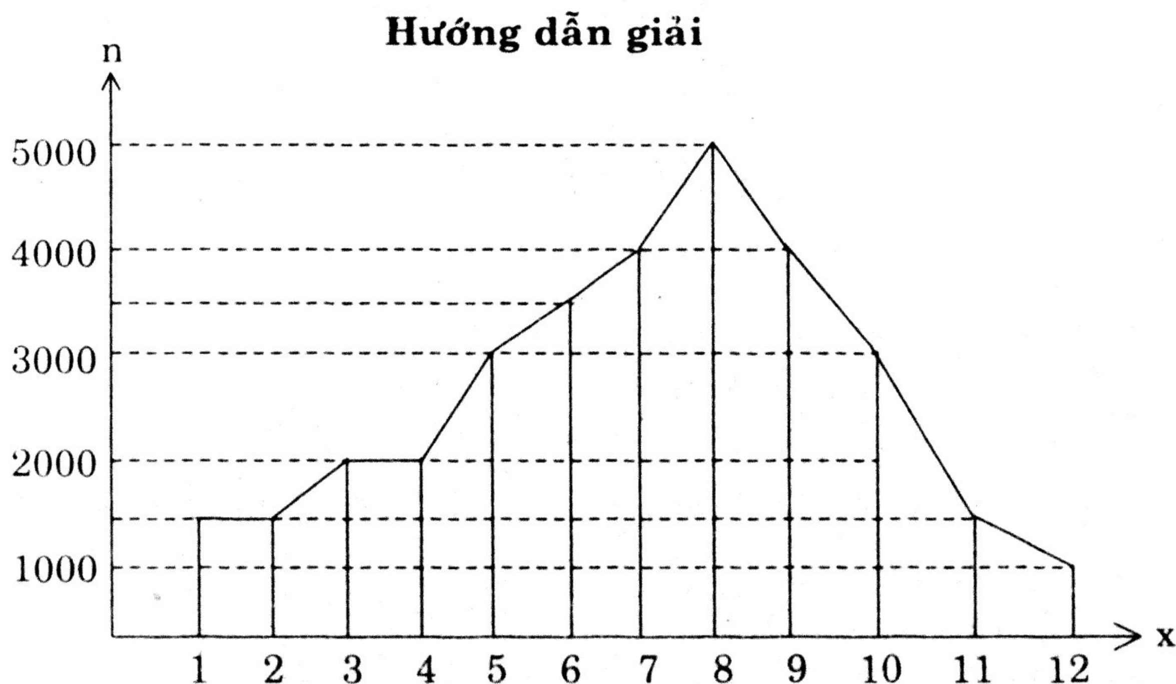
C. Luyện tập

Bài 6 Số lượng tiêu thụ hàng tháng trong năm về một loại hàng ở một thành phố như sau (tính theo đơn vị tấn):

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	1500	1500	2000	2000	3000	3500	4000	5000	4000	3000	1500	1000

Hãy biểu diễn tình hình nói trên bằng biểu đồ hình gấp khúc.

Hướng dẫn giải



Bài 7 Điện năng tiêu thụ trong một xóm (kWh) được ghi lại trong bảng sau:

45	100	45	100	70	100
165	85	65	100	65	50
100	90	53	70	140	41
75	75	57	133	45	65
50	150	40	70	84	59

a) Dấu hiệu là gì ? Nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

b) Biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

Bài 8 Số lượng tiêu thụ hàng tháng trong năm về một loại hàng ở một thành phố như sau (đơn vị tấn).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	1500	1500	2000	2000	3000	3500	4000	5000	4000	3000	1500	1000

Hãy biểu diễn tình hình nói trên bằng biểu đồ đoạn thẳng.

§4. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Công thức tính số trung bình cộng của dấu hiệu:

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3.... + x_kn_k}{N}$$

trong đó x_1 , x_2, ... x_k là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X;

n_1, n_2; ..., n_k là k tần số tương ứng.

N là số các giá trị.

Ý nghĩa: Số trung bình cộng thường được dùng làm đại diện cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

Mốc của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số; kí hiệu là M_0.

B. Các bài toán

Bài 8 Một xạ thủ bắn 60 phát súng, kết quả được ghi lại trong bảng dưới đây (số điểm của từng phát).

8	9	10	9	9	10	8	9	6	8
10	10	10	9	8	10	8	9	6	8
10	9	7	9	9	6	9	8	10	8
9	9	10	6	9	5	9	8	10	9
9	10	6	10	7	9	10	9	10	9
6	10	7	7	5	9	5	7	7	9

a) Gọi X là số điểm đạt được sau mỗi lần bắn. Lập bảng "tần số", từ đó tính số trung bình cộng.

b) Tính số trung bình cộng bằng công thức.

Giải

a) X: Số điểm đạt được mỗi lần bắn.

Lập bảng "tần số" và tính số trung bình cộng.

Giá trị x	Tần số n	Các tích	
$x_1 = 5$	$n_1 = 3$	15	
$x_2 = 6$	$n_3 = 6$	36	
$x_3 = 7$	$n_3 = 6$	42	$\overline{X} = \frac{504}{60} = 8{,}4$
$x_4 = 8$	$n_4 = 9$	72	
$x_5 = 9$	$n_5 = 21$	189	
$x_6 = 10$	$n_6 = 15$	150	
	N = 60	Cộng: 504	

b) Tính bằng công thức:

$$\overline{X} = \frac{3.5 + 6.6 + 6.7 + 9.8 + 21.9 + 15.10}{60} = \frac{504}{60} = 8{,}4$$

Bài 9 Thời gian giải một bài toán của 50 học sinh được ghi lại trong bảng sau (tính theo phút).

3	10	7	8	12	9	6	8	9	6
4	11	7	8	10	9	5	7	9	6
8	8	6	6	8	8	11	9	10	10
7	6	10	5	8	7	8	9	7	9
5	4	12	5	4	7	9	6	7	6

Đặt X là thời gian giải bài toán đó của một học sinh, hãy lập bảng "tần số" và tính $\overline{X}$.

Giải

Ta có số tất cả các giá trị của dấu hiệu là 50.

Lập bảng tần số:

Thời gian x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tần số n	1	3	4	8	8	9	8	5	2	2

Số trung bình cộng:

$$\overline{X} = \frac{1.3 + 3.4 + 4.5 + 8.6 + 8.7 + 9.8 + 8.9 + 5.10 + 2.11 + 2.12}{1 + 3 + 4 + 8 + 8 + 9 + 8 + 5 + 2 + 1}$$

= 7,58 (phút)

C. Luyện tập

Bài 9 Điều tra về số con của mỗi gia đình trong một khu phố, ta có bảng số liệu sau:

0	1	0	2	3	2	1	2	1	2
2	0	4	1	0	2	1	2	1	0

Hãy lập bảng "tần số" và tính số con trung bình của mỗi gia đình trong khu phố này.

Hướng dẫn:

$\overline{X} = \frac{27}{20} = 1,35$. Vậy số con trung bình là 1.

Bài 10 Điểm tổng kết môn Toán của từng em trong hai tổ học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây (mỗi tổ 12 em).

Tổ 1	1,7	2,4	3,5	4,6	5,2	5,3	5,4	6,1	6,3	7,6	8,8	9,1
Tổ 2	3,4	3,6	4,5	4,8	5,1	5,2	5,7	6,0	6,3	6,4	7,2	7,8

Tính số trung bình điểm tổng kết toán ở từng tổ. Nhận xét về điểm trung bình của hai tổ.

Hướng dẫn:

Tổ 1: $\overline{X} = \frac{66}{12} = 5,5$

Tổ 2: $\overline{X} = \frac{66}{12} = 5,5$

Điểm trung bình hai tổ bằng nhau.

Bài 11 Hai đội tuyển của quận I và quận II thi học sinh giỏi toán thành phố đạt điểm như sau:

Quận I : 7, 8, 8, 8, 12, 12, 17, 18, 18, 19

Quận II: 7, 9, 9, 10, 10, 12, 12, 16 ,17 , 18

Như vậy giá trị trung bình của điểm của đội tuyển có kết quả cao hơn gần bằng với:

a) 11,5, b) 12, c) 12,5, d) 13, e) 13,2

Hướng dẫn giải

Chọn câu c.

Đội tuyển Quận I

Giá trị x	Tần số n	Các tích
7	1	7
8	3	24
12	2	24
17	1	17
18	2	36
19	1	19
	10	127
$\overline{X} = \frac{127}{10} = 12,7$		

Đội tuyển Quận II

Giá trị x	Tần số n	Các tích
7	1	7
9	2	18
10	2	20
12	2	24
6	1	16
17	1	17
18	1	18
	10	120
$\overline{X} = \frac{120}{10} = 12,0$		

Đội tuyển quận I đạt kết quả cao hơn và có $\overline{X} = 12,7$

Bài 12 Sau khi tính được số trung bình của 35 điểm số, một học sinh lần lượt kể luôn số trung bình với 35 điểm số, và lại tính số trung bình của 36 điểm số. Tỉ số của số trung bình thứ hai với số trung bình thực sự là:

a) 1:1 b) 35:36 c) 36:35 d) 2:1 e) đáp số khác

Hướng dẫn giải

Chọn a.

Gọi 35 điểm số là $x_1, x_z, \dots x_{35}$ và trung bình của chúng là $\overline{X}$. Thế thì trung bình của 36 số là

$$A = \frac{35\overline{X} + \overline{X}}{36} = \overline{X}$$

Vậy tỉ số cần tìm là 1.

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Khái niệm: Biểu thức mà trong đó ngoài các số, các ký hiệu phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa còn có các chữ được gọi là biểu thức đại số.

– Các chữ đại diện cho một số xác định được gọi là hằng số.

– Các chữ đại diện cho những số tùy ý nào đó được gọi là biến số.

2. Chú ý:

– Trong biểu thức đại số, vì chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dụng những tính chất, qui tắc phép toán như trên các số.

– Các biểu thức đại số chứa biến ở mẫu chưa được xét trong chương này.

B. Các bài toán

Bài 1 Hãy viết các biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a) Tổng của a và b.

b) Tổng các bình phương của x và y.

c) Tổng các bình phương của ba số a, b, c.

d) Bình phương của hiệu a và b.

Giải

a) $a + b$ b) $x^2 + y^2$

c) $a^2 + b^2 + c^2$ d) $(a - b)^2$

Bài 2 Dùng các thuật ngữ "tổng", "hiệu", "tích", "thương", "bình phương" để đọc các biểu thức sau.

a) $2x^2 + 1$ b) $(x - 3)^2$

c) $(x - 1)(x + 1)$ d) $\frac{a + b}{ab}$

Giải

a) Tổng của tích của 2 với bình phương của x và 1.

b) Bình phương của hiệu x với 3

c) Tích của hiệu hai số x và 1 với tổng của chúng.

d) Thương của tổng hai số a và b với tích hai số ấy.

Bài 3 Cho các biểu thức $A = 5a^2b^4c^6$ và $B = a^3b^2 - a^2b^3$.

a) Chứng minh biểu thức A không âm với mọi a, b, c.

b) Khi nào thì biểu thức B là số dương.

Giải

a) Vì $5 > 0$; $a^2 \geq 0$, $b^4 \geq 0$, $c^6 \geq$ nên

$A = 5a^2b^4c^6$ hay biểu thức A không âm với mọi a, b, c.

b) Ta có $B = a^3b^2 - a^2b^3 = a^2b^2(a - b)$

Để $B > 0$ thì $a^2b^2(a-b) > 0$

suy ra $a - b > 0$ hay $a > b$.

C. Luyện tập

Bài 1 Hãy viết các biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a) Hiệu của x và y.

b) Hiệu các bình phương của a và b

c) Tổng các bình phương của ba số a, b, c.

d) Bình phương của tổng a và b.

Hướng dẫn giải

a) $x - y$ b) $a^2 - b^2$

c) $a^2 + b^2 + c^2$ d) $(a + b)^2$

Bài 2 Viết các biểu thức đại số sau:

a) Thương giữa hiệu một số với nghịch đảo của nó và tổng của số đó với nghịch đảo của nó.

b) Thương giữa hiệu hai bình phương và tổng hai bình phương của hai số khác 0.

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{a - \dfrac{1}{a}}{a + \dfrac{1}{a}}$ $(a \neq 0)$ b) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

Bài 3 Viết các biểu thức đại số biểu diễn:

a) Số nguyên chẵn; số tự nhiên chẵn.

b) Số nguyên lẻ; số tự nhiên lẻ.

c) Số nguyên chia hết cho 3; số nguyên chia cho 3 dư 2.

d) Hai số tự nhiên lẻ liên tiếp.

Hướng dẫn giải

a) $2n$ $(n \in Z)$; $2n$ $(n \in N)$

b) $2n + 1$ $(n \in Z)$; $2n + 1$ $(n \in N)$

c) $3n$ $(n \in Z)$; $3n + 2$ $(n \in Z)$

d) $2n - 1$, $2n + 1$ $(n \in N)$

Bài 4 Đọc các biểu thức đại số sau:

a) $n(n + 1)(n + 2)$ $\quad (n \in N)$

b) $a^3 + b^3 + c^3$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ $\quad (x, y, z \neq 0)$

d) $(a + b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

Hướng dẫn:

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp.

b) Tổng các lập phương của ba số a, b, c

c) Tổng các nghịch đảo của ba số x, y, z.

d) Tích của tổng hai số a và b với nghịch đảo của hiệu hai số ấy.

§2. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến ta thay những giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

B. Các bài toán

Bài 4 Hãy thay $x = 2$, $y = -1$ vào các biểu thức đại số sau rồi tính kết quả:

a) $2(x + 1)(y + 2)$ b) $(x - 1)y^2$

Giải

a) Thay $x = 2$, $y = -1$ vào biểu thức $2(x + 1)(y + 2)$ ta được:

$2(2 + 1)(-1 + 2) = 2 . 3 . 1 = 6$

b) Thay $x = 2$, $y = -1$ vào biểu thức

$(x - 1)\ y^2$ ta được:

$(2 - 1) . (-1)^2 = 1 . 1 = 1$

Bài 5 Tính giá trị biểu thức sau

a) $2x - 3y + 1$ tại $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{3}$

b) $2x^2 - y^2 + z^3$ tại $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$

Giải

a) Thay $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$ vào biểu thức

ta được: $2 . \frac{1}{2} - 3 . (-\frac{1}{3}) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

b) Thay $x = 1, y = -1$, $z = -1$ vài biểu thức ta được:

$2 . 1^2 - (-1)^2 = (-1)^3 = 2 - 1 - 1 = 0$

Bài 6 Tính giá trị của biểu thức

$A = 2x^2 - 5x + 1$ tại $|x| = \frac{1}{2}$

Giải

vì $|x| = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$

Tại $x = \frac{1}{2}$ thì $A = 2(\frac{1}{2})^2 - 5 . \frac{1}{2} + 1$

$= 2 . \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 1 = -1$

Tại $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = 2 . (-\frac{1}{2})^2 - 5 . (-\frac{1}{2}) + 1$

$= 2 . \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 1$

$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 4$

C. Luyện tập

Bài 5 Cho hai biểu thức:

$M = x^2 - 3x + 5$, $N = 2x - 1$.

a) Tính giá trị của mỗi biểu thức tại $x = 3$, $x = 2$.

b) Nói rằng biểu thức M và biểu thức N bằng nhau là đúng hay sai? Tại sao?

Hướng dẫn giải

a) Tại $x = 3$ ta có:

$M = 3^2 - 3. 3 + 5 = 9 - 9 + 5 = 5$

$N = 2 . 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

Tại $x = 2$ ta có:

$M = 2^2 - 3 . 2 + 5 = 4 - 6 + 5 = 3$

$N = 2 . 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

b) Nói biểu thức M và biểu thức N bằng nhau là sai

Chẳng hạn với $x = 0$ thì:

$M = 0^2 - 3 . 0 + 5 = 5$

$N = 2 . 0 - 1 = -1$

Khi đó M và N không bằng nhau.

Bài 6 Giá trị của biểu thức $5x - 3y$ tại $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{3}$ là:

a) 2 b) 1 c) 0 d) –2

Hướng dẫn giải

Thay $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{3}$ vào biểu thức ta được:

$5 . (-\frac{1}{5}) - 3 . (\frac{1}{3}) = -1 - 1 = -2$

Vậy chọn câu d.

Bài 7 Tính giá trị của biểu thức:

a) $ax^2 - ax + 3$ tại $x = 1$; $x = -1$

b) $ax^2 + bx + c$ tại $x = 1$; $x = -1$

Hướng dẫn:

a) $x = 1$ giá trị biểu thức bằng 3

$x = -1$ giá trị biểu thức bằng $2a + 3$

b) $x = 1$ giá trị biểu thức bằng $a + b + c$

$x = -1$ giá trị biểu thức bằng $a - b + c$

Bài 8 Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng không có những số nguyên a, b, c nào làm cho:

f(x) bằng 1 khi $x = 1998$ và bằng 2 khi $x = 2000$

Hướng dẫn:

Xét $f(2000) - f(1998)$, ta được:

$$a(2000^2 - 1998^2) = b(2000 - 1998) = 1$$

Vế trái của đẳng thức trên chia hết cho 2 còn vế phải thì không.

§3. ĐƠN THỨC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đơn thức:

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Số 0 được gọi là đơn thức không.

2. Đơn thức thu gọn:

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương (mỗi biến chỉ được viết một lần). Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.

3. Bậc của một đơn thức:

Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

4. Nhân hai đơn thức:

Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

B. Các bài toán

Bài 7 Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức:

a) $2 + xy^2$ b) $3x^2y^3z$

c) $3\frac{1}{2}$ d) $(1 - \frac{7}{9})x^2y$

Giải

a) $2 + xy^2$ không phải là đơn thức vì là biểu thức đại số có chứa phép cộng.

b) $3x^2y^3z$ là đơn thức vì là biểu thức chỉ gồm tích của số với các biến

c) $3\frac{1}{2}$ là một đơn thức vì nó là một số.

d) $(1 - \frac{7}{9})x^2y = \frac{2}{9}x^2y$ là một đơn thức vì là biểu thức đại số chỉ gồm một tích của số với các biến.

Bài 8 Thu gọn và chỉ ra phần hệ số, phần biến của các đơn thức sau:

a) $2xy^2 . (-\frac{1}{4}x^2y)$

b) $\frac{2}{3}ax^2y^3xy^2$ (a là hằng số)

c) $-\frac{2}{15}abx^2 . 5ax$ (a, b là hằng số)

d) $(3 + 2,7)x^2y^3z$

Giải

a) $2xy^2 . (-\frac{1}{4}x^2y) = 2.(-\frac{1}{4}) . x . x^2 . y^2 . y$

$$= -\frac{1}{2}x^3y^3$$

Phần hệ số là $-\frac{1}{2}$, phần biến là x^3y^3

b) $\frac{2}{3}ax^2y^3xy^2 = \frac{2}{3}a.x^2 . x . y^3 . y^2 = \frac{2}{3}a . x^3 . y^5$

Phần hệ số là $\frac{2}{3}a$, phần biến là x^3y^5

c) $-\frac{2}{15}abx^2.5ax = -\frac{2}{15} . 5 . a . a . b . x^2 . x = -\frac{2}{3}a^2b . x^3$

Phần hệ số là $-\frac{2}{3}a^2b$, phần biến là x^3

d) $(3 + 2,7)x^2y^3z = 5,7 . x^2y^3z$

Phần hệ số là 5,7; phần biến là x^2y^3z

Bài 9 Cho các đơn thức $\frac{1}{2}x^2y^3$ và $3xy^2$

a) Tìm tích của các đơn thức trên và cho biết phần hệ số, phần biến, bậc các đơn thức vừa thu được.

b) Tính giá trị của đơn thức vừa thu được với $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$.

Giải

a) $(\frac{1}{2}x^2y^3) . (3xy^2) = (\frac{1}{2} . 3)(x^2 . x).(y^3 . y^2) = \frac{3}{2}x^3y^5$.

Phần hệ số là $\frac{3}{2}$ phần biến là x^3y^5.

Bậc của đa thức là 8.

b) Với $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$ ta được:

$$\frac{3}{2} . (\frac{1}{2})^3 . (-1)^5 = \frac{3}{2} . \frac{1}{2^3}(-1) = \frac{-3}{16}$$

C. Luyện tập

Bài 9 Thu gọn các đơn thức:

a) $(1\frac{1}{4}x^2y)(-\frac{5}{6}xy)^0(-2\frac{1}{2}xy)$

b) $(\frac{1}{2}x . \frac{1}{4}x^2 . \frac{x^3}{8})(2y . 4y^2 . 8y^3)$

c) $(-\frac{a}{2})^3 3xy \cdot 4a^2x^3 \cdot (4\frac{1}{3}y^2a)$ trong đó a là hằng số.

d) $(2x^2y^3z^4)^k \cdot (-\frac{1}{2}xy^2)^2$

e) $(2\frac{1}{3}x^2y^3)^{10} \cdot (\frac{3}{7}x^5y^4)^{10}$

Hướng dẫn:

a) $-2\frac{11}{12}x^3y^2$; b) x^6y^6;

c) $-\frac{1}{2}a^6x^4y^3$; d) $2^{k-1}x^{2k+2}y^{3k+4}z^{4k}$ e) $x^{70}y^{70}$

Bài 10

a) Tính tích các đơn thức $(-\frac{3}{8}x^2z)$; $(\frac{2}{3}xy^2z^2)$ và $(\frac{4}{5}x^3y)$

b) Tính giá trị của mỗi đơn thức và giá trị của tích các đơn thức tại $x = -1$; $y = -2$; $z = 3$.

Hướng dẫn giải

a) $-\frac{1}{5}x^6y^3z^3$

b) Thừa số thứ nhất: $-1\frac{1}{8}$

Thừa số thứ hai: -24

Thừa số thứ ba: $1\frac{1}{5}$

Tích: $\frac{216}{5} = 43\frac{1}{5}$

Nhận xét: Giá trị của tích các đơn thức bằng tích các giá trị của các đơn thức.

Bài 11 Hai đơn thức $-3xy^2$ và $2x^3y^2$ có thể có giá trị dương được không?

Hướng dẫn giải:

Xét tích: $(-3xy^2)2x^3y^2 = -6x^4y^4 \leq 0$ với mọi x, y.

Do đó hai đơn thức không thể cùng có giá trị dương.

Bài 12 Chứng minh rằng ba đơn thức $-\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^2$; $16x^5y$ không thể cùng có giá trị âm.

Hướng dẫn giải

Xét tích: $(-\frac{1}{2}x^2y^3) \cdot (-\frac{3}{4}xy^2) \cdot 16x^5y = 6x^8y^6 \geq$ với mọi x, y.

Vậy ba đơn thức này không thể cùng có giá trị âm.

§4. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đơn thức đồng dạng:

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

Mọi số thức khác 0 là các đơn thức đồng dạng.

2. Cộng trừ các đơn thức đồng dạng:

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B. Các bài toán

Bài 10 Xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng:

$5x^2y^2z$; $\frac{3}{2}x^2yz$; $2xy^2z$; $-3x^2yz$,

$-\frac{3}{4}xy^2z$; $\frac{2}{7}x^2y^2z$; $-2x^2yz$; xy^2z.

Giải

Ta có ba nhóm các đơn thức đồng dạng:

$\frac{3}{2}x^2yz$; $-3x^2yz$; $-2x^2yz$

$2xy^2z$; $-\frac{3}{4}xy^2z$; xy^2z.

$5x^2y^2z$; $\frac{2}{7}x^2y^2z$

Bài 11 Viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức $3x^2y^3z$ rồi tính tổng của cả bốn đơn thức đó.

Giải

Có rất nhiều cách viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức $3x^2y^3z$, chẳng hạn:

$-2x^2y^3z$; $\frac{2}{3}x^2y^3z$; $-\frac{2}{3}x^2y^3z$

Tính tổng:

$$3x^2y^3z + (-2x^2y^3z) + \frac{2}{3}x^2y^3z + (-\frac{2}{3}x^2y^3z)$$

$$= (3x^2y^3z - 2x^2y^3z) + (\frac{2}{3}x^2y^3z - \frac{2}{3}x^2y^3z) = x^2y^3z.$$

Bài 12 Cho các đơn thức sau:

$\frac{2}{3}x^2y$; $-\frac{1}{2}xy^2$; $-\frac{1}{3}x^2y$; xy^2

a) Xếp các đơn thức trên thành nhóm các đơn thức đồng dạng rồi tìm tổng của từng nhóm các đơn thức đồng dạng đó.

b) Tính tích của tổng các nhóm đơn thức đồng dạng vừa tìm được ở trên và cho biết bậc của đơn thức nhận được.

Giải

a) Ta xếp được các nhóm đơn thức đồng dạng như sau.

$\frac{2}{3}x^2y$; $-\frac{1}{3}x^2y$; $-\frac{1}{2}xy^2$; xy^2.

Tổng của từng nhóm là:

$$\frac{2}{3}x^2y + (-\frac{1}{3}x^2y) = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3})x^2y = \frac{1}{3}x^2y$$

$$-\frac{1}{2}xy^2 + xy^2 = (-\frac{1}{2} + 1)xy^2 = \frac{1}{2}xy^2.$$

b) Tính tích của các tổng trên.

$$\frac{1}{3}x^2y.\frac{1}{2}xy^2 = \frac{1}{6}x^3y^3.$$

Bậc của đơn thức vừa nhận được là 6.

C. Luyện tập

Bài 13 Điền đơn thức thích hợp vào ô trống:

a) $2x^3y^3 + \square = 9x^2y^3$

b) $3x^3y^2 + \square = -5x^3y^2$

c) $xy^2 - \square = 3xy^2$

Đáp số:

$7x^2y^3$; $-8x^3y^2$; $-2xy^2$

Bài 14 Viết các đơn thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu của hai đơn thức, trong đó có một số hạng bằng 2xy:

a) $5xy$; b) $-xy$; c) $\frac{2}{5}xy$; d) $\frac{9}{4}xy$; e) $-\frac{4}{3}xy$

Hướng dẫn giải

a) $5xy = 2xy + 3xy$;

b) $-xy = 2xy - 3xy$;

c) $\frac{2}{5}xy = 2xy - 2xy + \frac{2}{5}xy = 2xy - \frac{8}{5}xy$

d) $\frac{9}{4}xy = 2\frac{1}{4}xy = 2xy + \frac{1}{4}xy$

e) $-\frac{4}{3}xy = 2xy - 2xy - \frac{4}{3}xy = 2xy - \frac{10}{3}xy$

Bài 15 Thực hiện các phép tính sau:

a) $3x^2y + 4x^2y - 6x^2y - \frac{1}{2}x^2y$

b) $a^3x + b^3x - c^3x$ (a, b, c là hằng số)

c) $\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}xy^2 + \frac{5}{6}xy^2$

d) $(-\frac{1}{2}x^2y^3)^3$

e) $(2x^2y)^{n+1}$

f) $(-\frac{2}{5}x^2y^3)^n$

g) $(-\frac{3}{4}xy^2z^3)^n$

Đáp số:

a) $x^2y - \frac{1}{2}x^2y = \frac{1}{2}x^2y$

b) $(a^3 + b^3 - c^3)x$

c) xy^2

d) $-\frac{1}{8}x^6y^3$

e) $2^{n+1} . x^{2(n+1)} . y^{n+1}$

f) $(-\frac{2}{5})^n . x^{2n} . y^{3n}$

g) $(-\frac{3}{4})^n . x^n . y^{2n} . z^{3n}$

Bài 16 Tính giá trị biểu thức:

a) $15x^4 - 7x^4 + (-20x^2)x^2$ với $x = -1$

b) $23x^2y^3 + 17x^3y^3 + (-50x^3)y^2$ với $x = 1$; $y = -1$

Hướng dẫn giải

a) $15x^4 + 7x^4 + (-20x^2)x^2 = 2x^4$

Với $x = -1$ ta có: $2x^4 = 2(-1)^4 = 2$

b) $23x^3y^3 + 17x^3y^3 + (-50x^3)y^2 = 40x^3y^3 - 50x^3y^2$

Với $x = 1; y = -1$

Ta có: $40x^3y^3 - 50x^3y^2$

$= 40(1)^3(-1)^3 - 50(1)^3(-1)^3$

$= -40 -50 = -90$

Bài 17 Chứng minh rằng nếu $a = x^3y$; $b = x^2y^2$

$c = xy^3$ thì với mọi x, y ta đều có.

a) $ac + b^2 - 2x^4y^3 = 0$

b) $ay^2 + cx^2 = 2xyb$

c) $abc + b^3 \geq 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $ac + b^2 - 2x^4y^4 = x^3yxy^3 + (x^2y^2) - 2x^4y^4$

$= x^4y^4 + x^4y^4 - 2x^4y^4 = 0$

b) Xét hiệu $ay^2 + cx^2 - 2xyb = x^3yy^2 + xy^3 . x^2 - 2xy . x^2y^2$

$= x^3y^3 + x^3y^3 - 2x^3y^3 = 0$

Do đó: $ay^2 + cx^2 = 2xyb$.

c) $abc + b^3 = x^3y.x^2y^2.xy^3 + (x^2y^2)^3 = x^6y^6 + x^6y^6$

$= 2x^6y^6$

Với mọi x, y ta đều có $x^6y^6 \geq 0$, do đó: $abc + b^3 \geq 0$

§5. ĐA THỨC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đa thức:

Đa thức là một đơn thức hoặc một tổng của hai hay nhiều đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

2. Thu gọn đa thức:

Trong đa thức nếu còn chứa các hạng tử đồng dạng thì ta thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng để được đa thức thu gọn.

3. Bậc của đa thức:

Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Chú ý:

– Số 0 cũng gọi là đa thức không và nó không có bậc.

– Khi tìm bậc của đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

B. Các bài toán

Bài 13 Thu gọn các đa thức sau và tìm bậc của đa thức:

a) $3xy^2z + 2x^2yz - 4xy^2z - 5x^2yz = -2xyz$

b) $2x^6 - xy^6 + 3x^2y^5 + 3xy^6 + 2x^2y^5$.

Giải

a) $3xy^2z + 2x^2yz - 4xy^2z - 5x^2yz - 2xyz$

$= 3xy^2z - 4xy^2z + 2x^2yz - 5x^2yz - 2xyz$

$= -xy^2z - 3x^2yz - 2xyz$.

Bậc của đa thức là 4.

b) $2x^6 - xy^6 + 3xy^6 + 2x^2y^5$

$= 2x^6 - xy^6 + 3x^2y^5 + 3xy^6 + 3x^2y^5 + 2x^2y^5$

$= 2x^6 + 2xy^6 + 5x^2y^5$

Bài 14 Viết đa thức $2x^3 - 3x^4 + x^2 + x + 1$ thành:

a) Tổng của hai đa thức

b) Hiệu của hai đa thức

Giải

Có nhiều cách viết, chẳng hạn:

a) $2x^3 - 3x^4 + x^2 + x + 1 = (2x^3 - 3x^4) + (x^2 + x + 1)$

hoặc $(2x^3 - x^4) + (-2x^4 + x^2 + x + 1)$...

b) $2x^3 - 3x^4 + x^2 + x + 1 = (2x^3 - 2x^4) - (x^4 - x^2 - x - 1)$

hoặc $(x^3 - x^4 + x^2 + x + 1) - (2x^4 - x^3)$...

Bài 15 Tính giá trị các đa thức

a) $5x^2y - 5xy^2 + xy$ tại $x = -2$, $y = -1$

b) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{2}{3}x^2y - xy + xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + 2xy$ tại $x = 0,5$; $y = 1$.

Giải

a) $5x^2y - 5xy^2 + xy = xy(5x - 5y + 1)$

tại $x = -2$, $y = -1$ ta được:

$(-2).(-1)[5.(-2)-5.(-1) + 1]$

$= 2(-10 + 5 + 1) = 2.(-4) = -8$

b) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{2}{3}x^2y - xy + xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + 2xy$

$= \frac{1}{2}xy^2 + xy^2 + \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{3}x^2y - xy + 2xy$

$= \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{3}x^2y + xy = xy(\frac{3}{2}y + \frac{1}{3}x + 1)$

tại $x = 0,5$; $y = 1$, ta được:

$0,5 . 1(\frac{3}{2} . 1 + \frac{1}{3} . 0,5 + 1) =$

$0,5(\frac{3}{2} + \frac{1}{6} + 1) = \frac{1}{2}(\frac{9}{6} + \frac{1}{6} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + 1) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Bài 16 Tính giá trị của đa thức:

$A = (2x - 1)(2y - 1)$, biết $x + y = 10$ và $xy = 16$

Giải

Ta có: $A = (2x - 1)(2y - 1) = 2x(2y - 1) - 1(2y - 1)$

$= 4xy - 2x - 2y + 1 = 4xy - 2(x + y) + 1$

mà $x + y = 10$ $xy = 16$

nên $A = 4.16 - 2.10 + 1$

$= 64 - 20 + 1 = 45$

C. Luyện tập

Bài 18 Tính bậc của các đa thức sau:

a) $17x^3y^2 - 2x^4y + 5xy^3 - 7x^3y^2 - xy^3 + 2x^4y$

b) $2x^3y^2z^3 - 5x^4 + 3y^7 - x^3y^2z^3 + 6yz^2$

Hướng dẫn giải

Để xác định bậc của đa thức, trước hết ta viết đa thức đó dưới dạng thu gọn:

a) $10x^3 \cdot y^2 + 4xy^3$: bậc 3 đối với x, bậc 3 đối với y. Đa thức có bậc là 5.

b) $x^3y^2z^3 - 54x^4 + 3y^7 + 6yz^2$: bậc 4 đối với x, bậc 7 đối với y, bậc 3 đối với z; đa thức có bậc là 8.

Bài 19 Tìm bậc của đa thức sau đối với mỗi biến x, y, z và bậc của đa thức đó.

a) $6x^7 - 15x^2y^3z^5 - 1995xy^3 - 7y^6 + z^8$

b) $\frac{1}{2}xy^2 - \frac{2}{5}x^4 + 3x^2y^3 + 12y^5 - 9z^8 - y^2z^5$

Hướng dẫn giải

Các bậc tương ứng của đa thức lần lượt theo đề bài là:

a) 7, 6, 8, 10 b) 4, 5, 8, 8.

Bài 20 Hãy viết các đa thức sau dưới dạng tổng các đơn thức:

a) $(a + 1)(xy + 1) + xy(x + y) + 1 - a$ (a là hằng số)

b) $xy(x^2 + y^2 + 1) - 3x^3y + 3xy^3 - 3y(x + y)$

c) $3x(x^2y + xy^2) - 7xy(x^2 - y^2) + 2x^2y^2 - 3xy^2 + 5xy + x + y + 1$

Đáp số:

a) $(a + 1)xy + x^2y + xy^2 + 2$

b) $-2x^3y + 4xy^3 - 2xy - 3y^2$

c) $4x^3y + 5x^2y^2 + 4xy^3 + 5xy + x + y + 1$

Bài 21 Tính giá trị biểu thức:

$2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$ với $x^2 + y^2 = 1$

Hướng dẫn:

$2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2$

$= 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$

$= 2(x^2 + y^2) = 2 \cdot 1 = 2$

Bài 22 Cho a, b, c là những hằng số và a + b + c = 2004. Tính giá trị của các đa thức sau:

a) $A = ax^3y^3 + bx^2y + cxy^2$ với x = 1; y = 1;

b) $B = ax^2y^2 - bx^4y + cxy^6$ với x = 1; y = −1

c) $C = axy + bx^2y^2 - cx^4y$ với x = −1; y = −1

Hướng dẫn giải

a) $A = a(1)^3(1)^3 + b(1)^2.1 + c.1(1)^2 = a + b + c = 2004$

b) $B = a(1)^2(-1)^2 - b(1)^4(-1) + c(1)(1)^6 = a - b(-1) + c$

$= a + b + c = 2004$

c) $C = a(-1)(-1) + b(-1)^2(-1)^2 - c(-1)^4(-1) = a + b + c = 2004$

§6. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Dựa vào quy tắc dấu ngoặc và tính chất của các phép tính trên số, ta có thể cộng, trừ các biểu thức số. Tương tự ta có thể thức hiện các phép toán cộng và trừ hai đa thức.

B. Các bài toán

Bài 17 Tính tổng của:

$3x^2y - x^3 - 2xy^2 + 5$ và $2x^3 - 3xy^2 - x^2y + xy + 6$

Giải

Tổng của hai đa thức là:

$(3x^2y - x^3 - 2xy^2 + 5) + (2x^3 - 3xy^2 - x^2y + xy + 6)$

$= (3x^2y - x^2y) + (-x^3 + 2x^3) + (2xy^2 - 3xy^2) + xy + (5 + 6)$

$= 2x^2y + x^3 - 5xy^2 + xy + 11.$

Bài 18 Viết một đa thức bậc 3 có ba biến x, y, z và có bốn hạng tử.

Giải

Có nhiều cách viết, chẳng hạn:

$x^3 + x^2y - xz^2 + 1$, hoặc

$xyz + xy^2 - x^2z + yz^2$, hoặc

$x^3 + yz + z + 3$...

Bài 19 Tìm đa thức M sao cho

a) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

b) $M - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

c) $(25x^2y - 13xy^2 + 3) - M = 11x^2y - 2y^3$

d) $M + (12x^4 - 15x^2y + 2xy^2 + 7) = 0$

Giải

a) $M = (6x^2 + 9xy - y^2) - (5x^2 - 2xy)$

$= 6x^2 + 6xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 - 11xy - y^2$

b) $M = (x^2 - 7xy + 8y^2) + (3xy - 4y^2)$

$= x^2 - 7xy + 8y^2 + 3xy - 4y^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

c) $M = (25x^2 - 13xy^2 + y^3) - 11x^2y - 2y^3 =$

$= 25x^2 - 13xy^2 + y^3 - 11x^2y + 2y^3$

$= 14x^2y - 13xy^2 + 3y^3$

d) $M = -12x^4 + 15x^2y - 2xy^2 - 7.$

Bài 20 Cho các đa thức:

$A = 4x^2 - 5xy + 3y^2;$

$B = 3x^2 + 2xy + y^2,$

$C = -x^2 + 3xy + 2y^2$

Tính:

$A + B + C;$ $B - C - A;$ $C - A - B;$

$A - B - C;$ $A + B - C$

Giải

$A + B + C = (4x^2 - 5xy + 3y^2) + (3x^2 + 2xy + y^2) + (-x^2 + 3xy + 2y^2)$

$= 4x^2 - 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 2yx + y^2 - x^2 + 3xy + 2y^2$

$= (4x^2 + 3x^2 - x^2) + (3y^2 + y^2 + 2y^2) + (-5xy + 2xy + 3xy)$

$= 6x^2 + 6y^2.$

$B - C - A = (3x^2 + 2xy + y^2) - (-x^2 + 3xy + 2y^2) - (4x^2 - 5xy + 3y^2)$

$= 3x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 3xy - 2y^2 - 4x^2 + 5xy - 3y^2$

$= (3x^2 + x^2 - 4x^2) + (y^2 - 2y^2 - 3y^2) + (2xy - 3xy + 5xy)$

$= -4y^2 + 4xy = 4xy - 4y^2$

$A - B - C = (4x^2 - 5xy + 3y^2) - (3x^2 + 2xy + y^2) - (-x^2 + 3xy + 2y^2)$

$= 4x^2 - 5xy + 3y^2 - 3x^2 - 2yx - y^2 + x^2 - 3xy - 2y^2$

$= (4x^2 - 3x^2 + x^2) + (3y^2 - y^2 - 2y^2) + (-5xy - 2xy - 3xy)$

$= 2x^2 - 10xy.$

$C - A - B = (-x^2 + 3xy + 2y^2) - (4x^2 - 5xy + 3y^2) - (3x^2 + 2xy + y^2)$

$= -x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x^2 - 2xy - y^2$

$= (-x^2 - 4x^2 - 3x^2) + (2y^2 - 3y^2 - y^2) + (3xy + 5xy - 2xy)$

$= -8x^2 - 2y^2 + 6xy.$

$A + B - C = (4x^2 - 5xy + 3y^2) + (3x^2 + 2xy + y^2) - (-x^2 + 3xy + 2y^2)$

$= 4x^2 - 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 3xy - 2y^2$

$= (4x^2 + 3x^2 + x^2) + (3y^2 + y^2 - 2y^2) + (-5xy + 2xy - 3xy)$

$= 9x^2 + 2y^2 - 6xy.$

C. Luyện tập

Bài 23 Tính tổng:

a) $(x^2 + 5x - 7) + (6x^2 + 3y - 2) + (-4x^2 + 5y - 3)$

b) $(4x^3 - 7y^3 + 2xy + 5y - \frac{1}{4}) + (-6x^3 - 2y^3 + 8x - \frac{1}{5}y + 6)$

c) $(42y^4 - 2z^6 - 5x^3 + 27xy + 1) + (-42y^4 + 2z^6 - 5x^3 + 27xy - 1)$

Đáp số:

a) $3x^2 + 5x + y - 5$

b) $2x^3 - 9y^3 + 2xy + 7x + 4\frac{4}{5}y + 5\frac{3}{4}$

c) $-10x^3 + 54xy.$

Bài 24 Tính giá trị của các đa thức sau:

a) $2x^3 + y^2 + 2xy - 3y^3 + 2x^3 + 3y^3 - 3x^3$

tại $x = 4; y = 5$

b) $x^6y^6 - x^4y^4 + x^2y^2 - xy + 1$

tại $x = -1; y = -1$

Đáp số:

a) $x^3 + y^2 + 2xy$. Thay $x = 4, y = 5$ vào ta được 129.

b) Thay $x = -1, y = -1$ vào ta được 1.

Bài 25 Cho $M = 2a^2 - 3b^2 + c^2$

$N = a^2 - b^2 + c^2$

$P = 5a^2 - 2b^2 - 3c^2$

Hãy tính: a) $M + N + P$; b) $M - N + P$

c) $M - N - P$; d) $M - N - P$

Đáp số:

a) $M + N = P = 8a^2 - 6b^2 - c^2$

b) $M - N - P = 6a^2 - 4b^2 - 3c^2$

c) $M - N - P = -4a^2 + 3c^2$

d) $M - N - P = -8a^2 + 6b^2 + c^2$

Bài 26 Cho các đa thức:

$M = 2x^2 - y - 2$; $N = 3x^2 + y$; $P = 1 - 5x^2$

Tính:

a) $M + N + P$; b) $N - P$; c) $M + (y - 2x^2 + 3)$

Đáp số:

a) 0; b) $8x^2 + y$; c) 1.

Bài 27 Cho hai đa thức:

$P = 3m^2 + 4mn - 2n^2$

$Q = -m^2 - 4mn + 3n^2$

Chứng minh rằng, không tồn tại giá trị nào của m và n để hai đa thức P và Q cùng có giá trị âm.

Hướng dẫn giải

Ta xét tổng:

$P + Q = 3m^2 + 4mn - 2n^2 - m^2 - 4mn + 3n^2 = 2m^2 + n^2 \geq 0$ với mọi m và n.

Như vậy tổng P + Q luôn luôn không âm, do đó hai đa thức P và Q không thể cùng âm được, nghĩa là không tồn tại giá trị nào của m và n thỏa mãn yêu cầu của bài.

§7. ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đa thức một biến:

Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

2. Bậc của đa thức một biến

Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ của lớn nhất của biến trong đa thức đó.

3. Hệ số:

Hệ số cao nhất là hệ số của hạng tử có bậc cao nhất.

**** Chú ý:***

– Hệ số tự do là hệ số của lũy thừa bậc 0

– Giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = 2$ được ký hiệu là $A(2)$

B. Các bài toán

Bài 21 Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng dần của biến. Tìm bậc của đa thức, hệ số cao nhất, hệ số tự do.

a) $3x^5 - 2x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x - x^5 + x^2 - 3x^4 - 1$

b) $2x^4 - 2x^2 + 4x^5 + 3x^2 - x + x^2 + 1 - x^4 - 2x^5$

Giải

a) $3x^5 - 2x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x - x^5 + x^2 - 3x^4 - 1$

$= (3x^5 - x^5) + (-2x^2 + x^2) + (x^4 - 3x^4) - \frac{1}{2}x - 1$

$= 2x^5 - x^2 - 2x^4 - \frac{1}{2}x - 1$

$= -1 - \frac{1}{2}x - x^2 - 2x^4 + 2x^5$

Đa thức có bậc 5, hệ số cao nhất là 2, hệ số tự do là 1.

b) $2x^4 - 2x^2 + 4x^5 + 3x^2 - x + x^2 + 1 - x^4 - 2x^5$

$= (2x^4 - x^4) + (-2x^2 + 3x^2 + x^2) + (4x^5 - 2x^5) - x + 1$

$= x^4 + 2x^2 + 2x^5 - x + 1$

$= 1 - x + 2x^2 + x^4 + 2x^5$

Đa thức có bậc 5; hệ số cao nhất là 2, hệ số tự do là 1.

Bài 22 Cho đa thức sau:

$5x^7 - 7x^6 + 5x^5 - 4x^4 + 7x^6 - 3x^2 + 1 - 5x^7 - 3x^5$

Bậc của đa thức đã cho là:

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4

Giải

Chọn câu c.

Thu gọn đa thức đã cho ta được:

$5x^7 - 7x^6 + 5x^5 - 4x^4 + 7x^6 - 3x^2 + 1 - 5x^7 - 3x^5 =$

$= (5x^7 - 5x^7) + (-7x^6 + 7x^6) + (5x^5 - 3x^5) - 4x^4 - 3x^2 + 1$

$= 2x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 1$

Đa thức có bậc là 5.

Bài 23 Cho đa thức:

$f = 2x - x^2 + 2\,|x + 1|$

a) Thu gọn đa thức f

b) Tính giá trị của f khi $x = -\dfrac{3}{2}$

Giải

$f = 2x - x^2 + 2\,|x + 1|$

a) Thu gọn:

Nếu $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$f = 2x - x^2 + 2(x-1)$

$= 2x - x^2 + 2x + 2$

$= -x^2 + 4x + 2$

Nếu $(x + 1) < 0 \Rightarrow x < -1$

$f = 2x - x^2 + 2[-(x + 1)] = 2x - x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2$

Vậy $f = -x^2 + 4x + 2$ với $x > -1$

$-x^2 - 2$ với $x < -1$

b) Tính giá trị của f khi $x = -\dfrac{3}{2}$

vì $x = -\dfrac{3}{2} < -1$

nên $f = -x^2 - 2 = -(-\dfrac{3}{2})^2 - 2 = -\dfrac{9}{4} - 2 = -\dfrac{17}{4}$

Bài 24 Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Chứng tỏ rằng $f(-2) - f(3) \leq 0$ biết rằng $13a + b + 2c = 0$.

Giải

$f(-2) = 4a - 2b + c$; $f(3) = 9a + 3b + c$

$f(-2) + f(3) = (4a - 2b + c) + (9a + 3b + c) = 13a + b + 2c = 0$ (theo đề bài)

Do đó: $f(-2) = -f(3)$ nên $f(-2).f(3) = -[f(3)]^2 \leq 0$

C. Luyện tập

Bài 23 Cho $f(x) = x^2 - 7x^2 + 6x - 3x^4 - 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 - 1$

$g(x) = 2x - 5 + 3x^2 - 6x - 10x^2 + x^3$.

a) Thu gọn mỗi đa thức.

b) Sắp xếp mỗi đa thức theo lũy thừa giảm dần và xác định bậc của mỗi đa thức.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = -7x - 9x^2 - x^4 + 6x^3 - 1$

$g(x) = -4x - 5 - 7x^2 + x^3$

b) Sắp xếp:

$f(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 7x - 1$ có bậc 3.

$g(x) = x^3 - 7x^2 - 4x - 5$ có bậc 3.

Bài 24 Thu gọn sắp xếp các số hạng của đa thức sau theo lũy thừa giảm của biến:

a) $2 + 3x^6 - 6x^2 + 5 - 9x^6 + 4x^4 + 2x^2$;

b) $4x^5 - 6x - 4x^2 + 3x^5 - x^2 + 1$.

Đáp số:

a) $-6x^2 + 4x^4 - 4x^2 + 3$

b) $7x^5 - 5x^2 - 6x + 1$.

Bài 25

a) Cho $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... + x^{100} - x^{101}$

Tính f(1), f(−1).

b) Cho $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... - x^{99} + x^{100}$

Tính f(1), g(−1).

Đáp số:

a) $f(1) = 0$; $f(-1) = 102$;

b) $g(1) = 1$; $g(-1) = 101$.

Bài 26

a) Cho $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... + x^{2n} - x^{2n+1}$

Tính $f(1)$, $f(-1)$.

b) Cho $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... - x^{2n-1} + x^{2n}$

Tính $g(1)$, $g(-1)$.

Đáp số:

a) $f(1) = 0$; $f(-1) = 2n + 2$;

b) $g(1) = 1$, $g(-1) = 2n + 1$.

Bài 27 Cho $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2n-1} + x^{2n}$

Tính $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa $f(0)$, $f(1)$ và $f(-1)$.

Hướng dẫn:

$f(0) = 1$; $f(1) = 2n + 1$; $f(-1) = 1$

Một trong các hệ thức có thể là $f(1) = 2n\, f(0) + f(-1)$.

§8. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Để cộng hoặc trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện một trong hai cách sau:

Cách 1: thực hiện theo cách cộng, trừ đa thức đã học ở §6.

Cách 2: Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như cộng, trừ các số. Chú ý các đơn thức cộng dạng ở cùng một cột).

B. Các bài toán

Bài 25 Cho các đa thức:

$f(x) = 3x^2 - 7 + 5x - 6x^2 - 4x^3 + 8 - 5x^5 - x^3$

$g(x) = - x^4 + 2x - 1 + 2x^4 + 3x^3 + 2 - x$

a) Thu gọn các đa thức trên rồi sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến.

b) Xác định bậc của mỗi đa thức.

c) Cho biết hệ số cao nhất và hệ số tự do của mỗi đa thức.

d) Tính f(x) + g(x) và f(x) − g(x)

Giải

a) $f(x) = -5x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

$g(x) = x^4 + 3x^2 + x + 1$

b) Đa thức f(x) có bậc 5, đa thức g(x) có bậc 4.

c) Đa thức f(x) có hệ số cao nhất là 5, hệ số tự do là 1

Đa thức g(x) có hệ số cao nhất là 1, hệ số tự do là 1.

$$\begin{array}{rlllllll} + & f(x) = -5x^5 & & -5x^3 & -3x^2 & +5x & +1 \\ & g(x) = & x^4 & +3x^3 & & +x & +1 \\ \hline f(x)+g(x) = & -5x^5 & +x^4 & -2x^3 & -3x^2 & +6x & +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlllllll} + & f(x) = -5x^5 & & -5x^3 & -3x^2 & +5x & +1 \\ & g(x) = & x^4 & +3x^3 & & +x & +1 \\ \hline f(x)-g(x) = & -5x^5 & -x^4 & -8x^3 & -3x^2 & +4x & \end{array}$$

Bài 26 Chọn câu đúng trong các câu sau:

$(3x^2 - 2x + 1) - (2x^3 + 4x - 1)$ bằng:

a) $2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

b) $2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$

c) $-2x^3 + 3x^2 + 6x + 2$

d) $-2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

Giải

Chọn câu d.

Ta có: $(3x^2 - 2x + 1) - (2x^3 + 4x - 1) =$

$= 3x^2 - 2x + 1 - 2x^3 - 4x + 1$

$= 3x^2 + (-2x - 4x) + (1 + 1) - 2x^3$

$= 3x^2 - 6x + 2 - 2x^3$

$= -2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

Bài 27 Cho các đa thức:

$A = -3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$B = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 4$

a) Tính C = A + B, D = A – B, E = C – D

b) Tính giá trị của các đa thức A, B, C, D, E tại x = –1

Giải

a) $C = (-3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) + (3x^3 - 6x^2 + 5x - 4)$

$= (-3x^3 + 3x^3) + (4x^2 - 6x^2) + (-5x + 5x) + (6 - 4)$

$= -2x^2 + 2$

$D = (-3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) - (3x^3 - 6x^2 + 5x - 4)$

$= -3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 4$

$= (-3x^3 - 3x^3) + (4x^2 + 6x^2) + (-5x - 5x) + (6 + 4)$

$= -6x^3 + 10x^2 - 10x + 10$

$E = (-2x^2 + 2) - (-6x^3 + 10x^2 - 10x + 10)$

$= -2x^2 + 2 + 6x^3 - 10x^2 + 10x - 10$

$= -12x^2 - 8 + 6x^3 + 10x$

$= 6x^3 - 12x^2 + 10x - 8$

b) Tính giá trị của các đa thức tại x = –1

$A = -3\,(-1)^3 + 4\,.\,(-1)^2 - 5(-1) + 6$

$= -3\,.\,(-1) + 4.1 - 5\,.\,(-1) + 6$

$= 3 + 4 + 5 + 6 = 18$

$B = 3\,(-1)^3 - 6\,.\,(-1)^2 + 5(-1) - 4$

$= 3\,.\,(-1) - 6.1 + 5.(-1) - 4$

$= -3 - 6 - 5 - 4 = -18$

$C = -2\,.\,(-1)^2 + 2 = -2\,.\,1 + 2 = 0$

$D = -6(-1)^3 + 10\,(-1)^2 - 10\,(-1) + 10$

$= -6\,(-1) + 10.1 - 10\,(-1) + 10$

$= 6 + 10 + 10 + 10 = 36$

$E = 6\,(-1)^3 - 12\,(-1)^2 + 10(-1) - 8$

$= 6.(-1) - 12.1 + 10.(-1) - 8$

$= -6 - 12 - 10 - 8 = -36$

Chú ý: Ta có thể tính ngay giá trị của đa thức C, D, E khi biết giá trị của đa thức A, B (khỏi phải thay $x = -1$ vào các đa thức C, D, E). Như sau:

Cũng tại $x = -1$ ta có $A = 18$, $B = -18$

nên $C = A + B = 18 + (-18) = 0$

$D = A - B = 18 - (-18) = 36$

$E = C - D = 0 - 36 = -36$

C. Luyện tập

Bài 28 Tính $f(x) - g(x)$ với:

a) $f(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 5$

$g(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 6$

b) $f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$g(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$g(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$

Đáp số:

a) $x^5 - 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$

b) $6x^4 + 2x^3 - 2x - 6$

c) $(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0$

Bài 29

Cho $f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{4}x(x + 6) - \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{2}{5}$;

$g(x) = \frac{1}{5}x(x - 5) - 3x^4 + 2$

a) Thu gọn các đa thức trên.

b) Tính $f(x) - g(x)$ sau khi xếp chúng theo lũy thừa tăng của biến.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = -\frac{2}{5} - \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

$g(x) = 2 - x + \frac{1}{5}x^2 - 3x^4$

b) $f(x) - g(x) = -\frac{12}{5} - \frac{5}{2}x - \frac{19}{20}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^4$

Bài 30

Cho $A = -3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$B = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 4$

a) Tính $C = A + B$; $D = A - B$; $E = C - D$

b) Tính giá trị số của A, B, C, D, E khi $x = -2$

Đáp số:

a) $C = -2x^2 + 2$; $D = -6x^3 + 10x^2 - 10x + 10$;

$E = 6x^3 - 12x^2 + 10x - 8$

b) $A = 56$; $B = -62$; $C = -6$; $D = 118$; $E = -124$.

Bài 31 Cho đa thức f(x). Hãy tìm đa thức đối $-f(x)$

a) $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 - 7x^6 + 8x^7$

b) $f(x)= 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + 6x^6 - 7x^6 + 8x^8$

c) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

Hướng dẫn:

Để tìm đa thức đối $-f(x)$ chỉ việc đổi dấu tất cả các số hạng của đa thức f(x).

Bài 32 Cho các đa thức:

$A(x) = 3x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 7$;

$B(x) = 8x^6 + 7x^4 - x^2 + 11$;

$C(x) = x^6 + x^4 - 8x^2 + 6$.

Tính:

A(x) + B(x); B(x) + C(x); C(x) + A(x);

A(x) + B(x) – C(x); B(x) + C(x) – A(x);

C(x) + A(x) – B(x); A(x) + B(x) + C(x);

Hướng dẫn giải

$A(x) + B(x) = 11x^6 + 2x^4 + 2x^4 + x^2 + 4$

$B(x) + C(x) = 9x^6 + 8x^4 - 9x^2 + 17$

$C(x) + A(x) = 4x^6 - 4x^4 - 6x^2 - 1$

$A(x) + B(x) - C(x) = 10x^6 + x^4 + 9x^2 - 2$

$B(x) + C(x) - A(x) = 6x^6 + 13x^4 + 11x^2 + 24$

$C(x) + A(x) - B(x) = -4x^6 - 11x^4 - 5x^6 - 12$

$A(x) + B(x) + C(x) = 12x^6 + 3x^4 - 7x^2 + 10$

§9. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

– Nếu tại x = a, đa thức P(x) có giá trị bằng 0 thì ta nói a là một nghiệm của đa thức đó.
– Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm,..., hoặc không có nghiệm.
– Số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt quá bậc của nó.

B. Các bài toán

Bài 28 Mỗi số 1, 2, –1 có phải là một nghiệm của đa thức

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ hay không?

Giải

Ta có đa thức $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Tại x = 1 thì $f(1) = 1^2 - 3.1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

nên x = 1 là một nghiệm của đa thức f(x).

Tại x = 2 thì $f(2) = 2^2 - 3.2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

nên x = 2 là 1 nghiệm của đa thức f(x)

Tại x = –1 thì $f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2$

$= 1 + 3 + 2 = 6 \neq 0$

nên x = –1 không là một nghiệm của đa thức f(x).

Bài 29 Tìm nghiệm của đa thức:

a) $3x + 12$ b) $2x - \frac{1}{3}$ c) $-6x + \frac{2}{3}$

Giải

a) x = 4 là một nghiệm của đa thức 3x + 12

vì $3 . (-4) + 12 = -12 + 12 = 0.$

$x = \frac{1}{6}$ là một nghiệm của đa thức $2x - \frac{1}{3}$

vì $2 . \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{2}{6} - \frac{1}{3} = 0.$

$x = \frac{1}{9}$ là một nghiệm của đa thức $6x + \frac{2}{3}$

vì $-6.(\frac{1}{9}) + \frac{2}{3} = \frac{-6}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$

Bài 30 Tìm một đa thức có hai nghiệm là 1 và – 3.

Giải

Đa thức có hai nghiệm $x = 1$, $x = -3$ sẽ bằng 0 khi

$x = 1$, $x = -3$.

Suy ra đa thức đó là $(x - 1)(x + 3)$.

Chú ý: có nhiều đáp số nữa, chẳng hạn

đa thức $(2x - 2)(x + 3)$; $(x - 1)(2x + 6)$;...

Bài 31 Cho đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + 1$

Tìm a biết rằng đa thức f(x) có một nghiệm $x = -2$.

Giải

Đa thức f(x) có một nghiệm $x = -2$ nên $f(-2) = 0$

hay $(-2)^3 + 2(-2)^2 + a(-2) + 1 = 0$

$$-8 + 8 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Vậy $a = \frac{1}{2}$ thì f(x) có nghiệm $x = -2$

Bài 32

a) Giả sử a, b, c là những hằng số, sao cho $a + b + c = 0$

Chứng minh rằng đa thức $f(x) = a^2 + bx + c$ có một nghiệm là $x = 1$.

Áp dụng để tìm một nghiệm của đa thức

$f(x) = 8x^2 - 6x - 2$

b) Giả sử a, b, c là những hằng số, sao cho $a - b + c = 0$.

Chứng minh rằng đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có một nghiệm là $x = -1$.

Áp dụng để tìm một nghiệm của đa thức

$f(x) = fx^2 + 11x + 4$.

Giải

a) Ta có $f(1) = a.1^2 + b.1 + c = a + b + c = 0$.

Vậy $x = 1$ là một nghiệm của đa thức f(x)

Ta thấy $8 + (-6) + (-2) = 0$, nên $f(x) = 8x^2 - 6x - 2$ có một nghiệm $x = 1$.

b) Ta có: $f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c = 0$

Vậy $x = -1$ là một nghiệm của đa thức f(x)

Ta thấy $f(-11) + 4 = 0$ nên $f(x) = fx^2 + 11x + 4$ có một nghiệm $x = -1$.

C. Luyện tập

Bài 33 Hãy viết đa thức có:

a) Một nghiệm duy nhất là -2

b) Hai nghiệm là 1 và 2.

c) Ba nghiệm là 1; -2 và 3.

Hướng dẫn giải

Có thể viết:

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = (x - 1)(x - 2)$

c) $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Đây là những đa thức đơn giản nhất thỏa mãn đề bài.

Bài 34 Hãy chứng tỏ rằng:

a) Đa thức $f(x) = 3x - \frac{2}{3}$ có nghiệm là $x = \frac{2}{9}$.

b) Đa thức $g(x) = 2x^2 - x - 1$ có hai nghiệm là

$x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

a) $f(\frac{2}{9}) = 3.\frac{2}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2}{9}$ là nghiệm của f(x);

b) $g(1) = 2(1)^2 - (1) - 1 = 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ là nghiệm của g(x);

$g(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của g(x).

Bài 35 Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = x^3 - 4x$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x$

c) $f(x) = 3x^3 + x^2$ d) $f(x) = x^3 + 8$

Đáp số:

a) f(x) có ba nghiệm là 0; –2 và 2

b) f(x) có một nghiệm là 0

c) f(x) có hai nghiệm là 0 và $-\frac{1}{3}$

d) f(x) có một nghiệm là –2

Bài 36 Tìm một nghiệm của đa thức sau:

a) $x^2 - 2004x + 2003 = 0$

b) $2003x^2 + 2004x + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Có $a + b + c = 0$ nên có một nghiệm là $x = 1$

b) Có $a - b + c = 0$ nên có một nghiệm là $x = -1$.

Bài 37 Chứng minh đa thức: $f(x) = x^2 + (x - 1)^2 + (x - 2)^2$ không có nghiệm.

Hướng dẫn giải

$f(x) = x^2 + (x - 1)^2 + (x - 2)^2$

Vì $x^2 \geq 0$; $(x - 1) \geq 0$; $(x - 2) \geq 0$ nên $f(x) = 0$

khi $x = x - 1 = x - 2 = 0$ điều này không xảy ra đối với x.

Vậy f(x) không có nghiệm.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

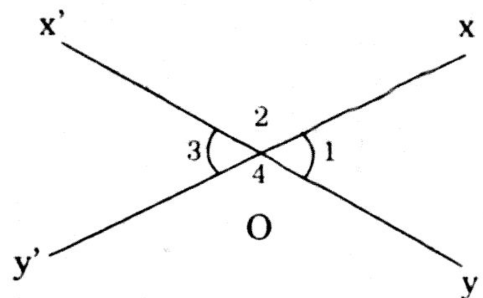
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Hai góc đối đỉnh

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.



Hai góc O_1, O_3 là hai góc đối đỉnh.

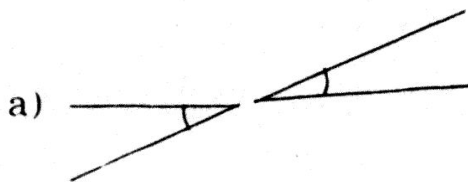
2. Tính chất:

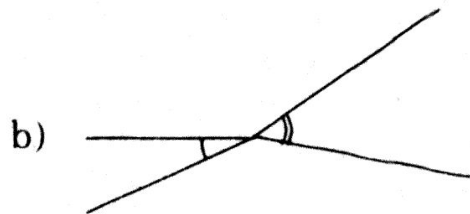
Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

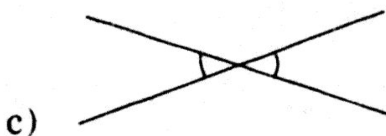
$\widehat{xOy}$ đối đỉnh $\widehat{x'Oy'} \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$

B. Các bài toán

Bài 1 Xem các hình a, b, c, d.

a) 

b) 

c) 

d) 

Hỏi cặp góc nào đối đỉnh, cặp góc nào không đối đỉnh? Vì sao?

Giải

a) Hai góc này không đối đỉnh vì chúng không có đỉnh chung.

b) Hai góc này không đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này không là tia đối của một cạnh của góc kia.

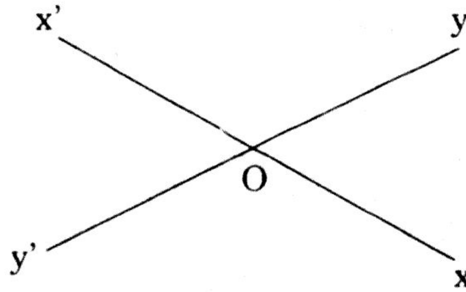
c) Hai góc đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

d) Hai góc này không đối đỉnh vì một cạnh của góc này không là tia đối của cạnh góc kia.

Bài 2 Cho hai đường thẳng x'x và y'y cắt nhau tại O.

Biết $\widehat{x'Oy} = 2\ \widehat{xOy}$. Tính bốn góc tạo thành thành từ hai đường thẳng đó.

Giải



Ta có: $\widehat{x'Oy} + \widehat{xOy} = 180^0$ (kề bù)

mà $\widehat{x'Oy} = 2\ \widehat{xOy}$

nên $2\ \widehat{xOy} + \widehat{xOy} = 180^0$

hay $\widehat{xOy} = 60^0$

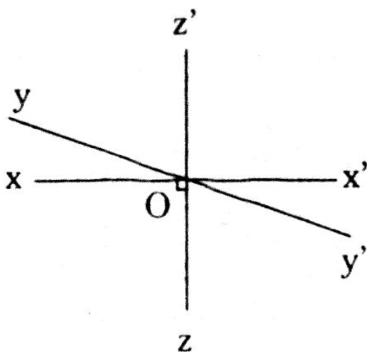
Suy ra: $\widehat{x'Oy} = 182^0$

Vậy: $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} = 60^0$

$\widehat{x'Oy} = \widehat{xOy'} = 120^0$ (đối đỉnh)

Bài 3 Cho ba đường thẳng phân biệt xx', yy', zz' cắt nhau ở điểm O. Nếu một trong các góc tạo thành có một góc vuông thì ta có mấy cặp góc đối đỉnh nhọn? Mấy cặp góc đối đỉnh tù?

Giải



Có 6 cặp góc đối đỉnh là $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{xOy}$; $\widehat{y'Oz'}$ và $\widehat{yOz}$; $\widehat{x'Oz'}$ và $\widehat{xOz}$; $\widehat{x'Oy}$ và $\widehat{xOy'}$ $\widehat{y'Oz}$ và $\widehat{yOz'}$; $\widehat{z'Ox}$ và $\widehat{zOx'}$.

Nếu một trong các góc tạo thành là góc vuông, chẳng hạn $\widehat{xOz} = 1v$ thì ta có $\widehat{x'Oz'} = 1v$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.

Mặt khác: $\widehat{x'Oz} = \widehat{z'Ox} + \widehat{xOz}$

$\Rightarrow 180^0 = \widehat{z'Ox} + 1v$

$\Rightarrow \widehat{z'Ox} = 1v \Rightarrow \widehat{zOx'} = 1v$ (đối đỉnh với $\widehat{z'Ox}$).

Như vậy ta có hai cặp góc đối đỉnh vuông.

Giả sử Oy' nằm giữa Ox', Oz. Khi đó hai góc $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{y'Ox}$ đều nhọn. Do đó hai góc đối đỉnh của chúng là $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOx'}$ cùng đều nhọn. Nghĩa là ta có hai cặp góc đối đỉnh đều nhọn.

Hai cặp góc đối đỉnh còn lại là hai cặp góc đối đỉnh tù:

$\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{xOy}$; $\widehat{y'Oz'}$ và $\widehat{yOz}$.

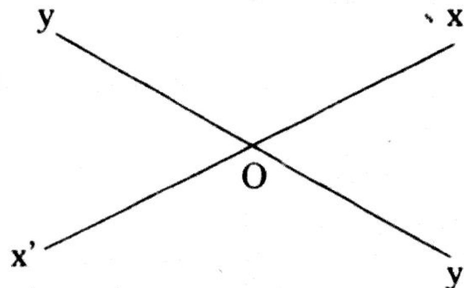
C. Luyện tập

Bài 1 Cho hai đường thẳng x'x và y'y cắt nhau tại O.

a) Hỏi hai đường thẳng cắt nhau đó tạo thành mấy góc (khác góc bẹt).

b) Tính số đo mỗi góc tạo thành. Nếu biết hiệu số đo của hai góc kề bù là 30^0.

Hướng dẫn giải



a) Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 góc bẹt: $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOx'}$, $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{y'Ox}$.

b) Gọi $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOx'}$ là hai góc kề bù.

Giả sử $\widehat{xOy} - \widehat{yOx'} = 30^0$

Lại có: $\widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 180^0$ (do hai góc kề bù)

$\Rightarrow 2\,\widehat{xOy} = 210^0 \Rightarrow \widehat{xOy} = 105^0$

$\Rightarrow \widehat{yOx'} = 180^0 - 105^0 = 75^0$

$\Rightarrow \widehat{xOy'} = \widehat{yOx'} = 75^0$ (hai góc đối đỉnh)

và $\widehat{x'Oy'} = \widehat{xOy} = 105^0$ (hai góc đối đỉnh)

Bài 2 Cho hai đường thẳng xy và hai điểm A, B ở trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy. Xác định điểm C trên xy sao cho $\widehat{ACx} = \widehat{BCy}$.

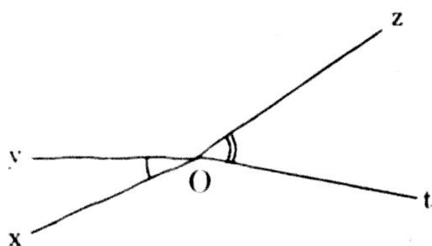
Đáp số: C là giao điểm của xy và AB.

Bài 3 Ta có hai góc không có điểm trong chung là hai góc mà mỗi cạnh góc này không nằm giữa hai cạnh góc kia.

Cho ba đường thẳng phân biệt x'x, y'y, z'z cắt nhau ở điểm O.

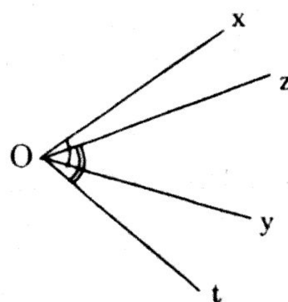
a) Hãy tìm sáu cặp góc đối đỉnh.

b) Có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh không có điểm trong chung?



$\widehat{xOy}$ và $\widehat{zOt}$

không có điểm trong chung.



$\widehat{xOy}$ và $\widehat{zOt}$ có điểm trong chung.

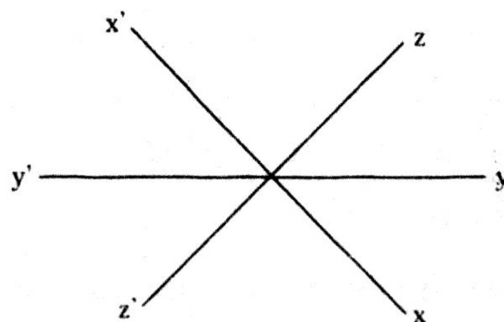
Hướng dẫn giải

a) Sáu cặp góc đối đỉnh là:

$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$; $\widehat{yOz}$ và $\widehat{y'Oz'}$;

$\widehat{xOz}$ và $\widehat{x'Oz'}$; $\widehat{x'Oz}$ và $\widehat{xOz'}$;

$\widehat{xOy'}$ và $\widehat{x'Oy}$; $\widehat{yOz'}$ và $\widehat{y'Oz}$



b) Ba cặp góc là:

$\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{xOy}$;

$\widehat{yOz}$ và $\widehat{yOz'}$;

$\widehat{z'Ox'}$ và $\widehat{zOx}$

Bài 4 Cho góc xOy có số đo bằng 110^0 và tia Oz là tia phân giác của góc ấy. Gọi aOb là góc đối đỉnh của góc xOz. Tìm số đo góc aOy.

Hướng dẫn giải

$\widehat{aOy} = 70^0$ hoặc $\widehat{aOy} = 125^0$

Bài 5 Cho hai đường thẳng a'Oa và b'Ob cắt nhau tại điểm O sao cho $\widehat{aOb} = 60^0$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng a'Oa và chứa tia Ob', người ta vẽ tia Ox sao cho $\widehat{aOc} = 90^0$.

a) Tìm số đo góc $\widehat{bOc}$

b) Hãy vẽ tia Oc' sao cho hai góc bOc và b'Oc' là hai góc đối đỉnh.

Tia Oc' có nằm giữa hai tia Oa và Ob' không?

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{bOc} = 150^0$;

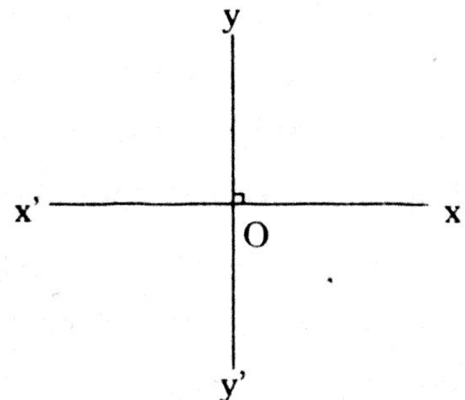
b) Oc' không nằm giữa Oa và Ob'.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Hai đường thẳng vuông góc:

Hai đường thẳng xx', yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc và ký hiệu là xx' ⊥ yy'.

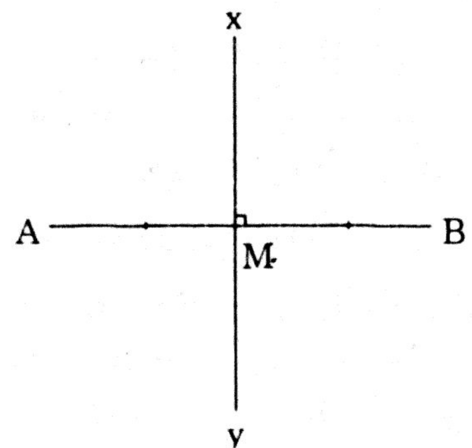


2. Tính chất:

Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

3. Đường trung trực của đoạn thẳng

Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy. xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



B. Các bài toán

Bài 4 Hãy chọn câu đúng trong các câu sau:

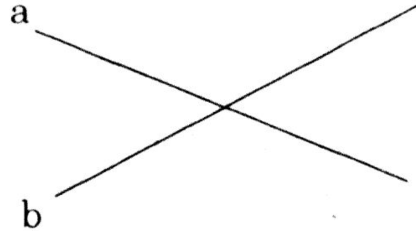
a) Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.

b) Hai đường thẳng cắt nhau thì vuông góc.

c) Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau và ngược lại hai đường thẳng cắt nhau thì vuông góc.

Giải

Chọn câu a.



Câu b sai vì hai đường thẳng cắt nhau thì chưa hẳn đã vuông góc. Chẳng hạn như hình vẽ bên: Hai đường thẳng a, b cắt nhau nhưng chúng không vuông góc.

Câu c sai vì điều ngược lại sai.

Bài 5 Cho biết hai đường thẳng xx' và yy' vuông góc với nhau tại O. Tìm câu sai trong các câu sau:

a) Hai đường thẳng xx' và yy' tạo thành một góc vuông.

b) Hai đường thẳng xx' và yy' tạo thành bốn góc vuông.

c) Hai đường thẳng xx' và yy' có thể không cắt nhau.

d) Mỗi đường thẳng là đường phân giác của một góc bẹt.

Giải

Chọn câu c.

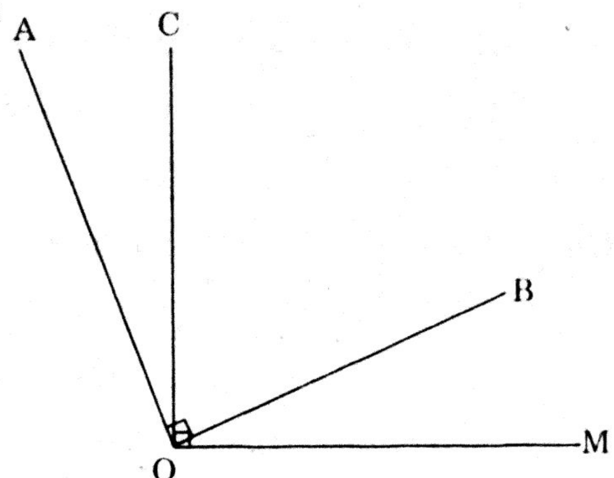
Câu a đúng và b đúng vì hai đường thẳng vuông góc sẽ tạo thành một góc vuông hay bốn góc vuông.

Câu c sai vì hai đường thẳng vuông góc với nhau tại O luôn cắt nhau tại O.

Câu d đúng vì các góc tạo thành bằng nhau, bằng 90^0.

Bài 6 Cho góc AOM có số đo bằng 120^0. Vẽ các tia OB, OC nằm trong góc AOM sao cho $OB \perp OA$, $OC \perp OM$. Tính số đo góc BOC.

Giải



OB nằm giữa OA, OM mà:

$\widehat{AOB} = 90^0$

$\widehat{AOM} = 120^0$

Vậy $\widehat{BOM} = 120^0 - 90^0 = 30^0$

$\widehat{MOB} = 30^0$

$\widehat{MOC} = 90^0$

Vậy OB nằm giữa OM, OC

$\widehat{BOC} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

C. Luyện tập

Bài 5 Cho góc bẹt AOB. Vẽ tia OM sao cho $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$. Vẽ tia OC nằm giữa hai tia OA, OM. Kể tên các góc vuông, góc nhọn, góc tù.

Hướng dẫn giải

góc vuông: $\widehat{MOA}$, $\widehat{MOB}$

góc nhọn: $\widehat{AOC}$, $\widehat{COM}$

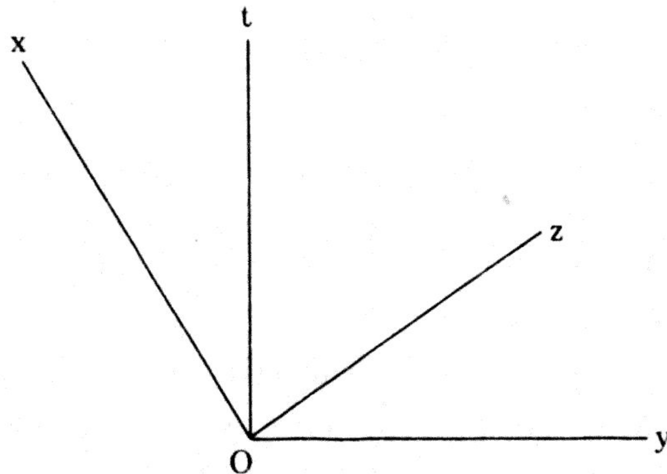
góc tù: $\widehat{BOC}$

Bài 6 Cho góc xOy tù, ở miền trong góc ấy dựng các tia Oz và Ot sao cho Oz vuông góc với Ox, Ot vuông góc với Oy. Tính tổng số đo của hai góc xOy và zOt.

Hướng dẫn giải

Ta có: Ox vuông góc với Oz nên $\widehat{xOz} = 90^0$.

Ot vuông góc với Oy nên $\widehat{tOy} = 90^0$.



nên $\widehat{xOy} = \widehat{zOt} = \widehat{tOy} + \widehat{xOt} + \widehat{zOt}$

$= \widehat{tOy} + \widehat{xOz}$

$= 180^0$

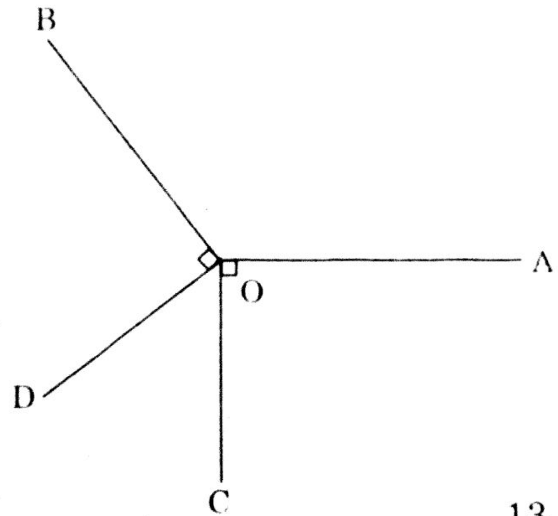
Bài 7 Cho góc tù AOB. Ở ngoài góc đó dựng các tia OC, OD theo thứ tự vuông góc với các tia OA, OB. Tính $\widehat{AOB} + \widehat{COD}$.

Hướng dẫn giải

$\widehat{AOB} + \widehat{BOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COA} = 360^0$

mà $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 90^0$

nên $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^0$



Chú ý: Trong trường hợp $\widehat{AOB}$ nhọn, đẳng thức:

$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^0$ còn đúng hay không? Hãy xét trường hợp này.

Bài 8 Cho hai góc kề xOz và zOy, biết tỉ số số đo của hai góc là $\frac{13}{5}$ và hiệu giữa chúng là 40^0.

a) Tìm số đo hai góc đó?

b) Có nhận xét gì về hai tia Ox, Oy.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{\widehat{xOz}}{\widehat{zOy}} = \frac{13}{5}$

và $\widehat{xOz} - \widehat{zOy} = 40^0$

Suy ra: $\widehat{xOz} = 65^0, \widehat{zOy} = 25^0$

b) $\widehat{xOy} = \widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 90^0$

Vậy $Ox \perp Oy$

§3. CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Góc so le trong, góc đồng vị

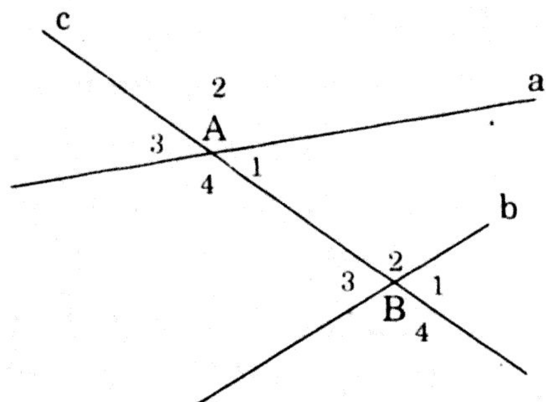
Trên hình vẽ, ta có:

– Hai cặp góc so le trong:

$\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$

– Bốn cặp góc đồng vị là:

$\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$, $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$



2. Tính chất:

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì:

a) Hai góc so le trong còn lại bằng nhau;

b) Hai góc đồng vị (trong mỗi cặp) bằng nhau.

B. Các bài toán

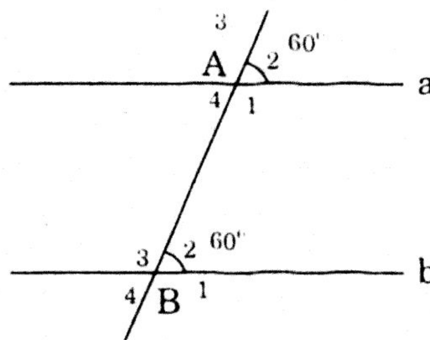
Bài 7

a) Vẽ một đường thẳng cắt hai đường thẳng để trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau với số đo là 60^0. Đặt tên cho các góc tạo thành.

b) Viết tên một cặp góc đồng vị có số đo bằng 120^0.

c) Viết tên một cặp góc so le trong có số đo bằng 60^0.

Giải

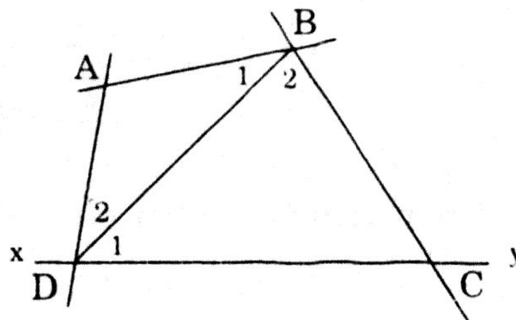


a) Xem hình vẽ.

b) Cặp góc đồng vị có số đo bằng 120^0 là: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$ (kề bù với góc 60^0)

c) Cặp góc so le trong có số đo bằng 60^0 là: $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$.

Bài 8 Xét các góc được ghi trong hình vẽ:



a) Với hai đường thẳng AB và xy hãy cho biết:

Đối với đường thẳng AD thì cặp góc nào là cặp góc so le trong? Cũng hỏi như vậy đối với đường thẳng BC.

b) Với hai đường thẳng AD và BC hãy cho biết:

Đối với đường thẳng xy thì cặp góc nào là cặp góc đồng vị, cặp góc nào là cặp góc trong cùng phía, cặp góc nào là cặp góc ngoài cùng phía?

c) Cặp góc $\widehat{B_1}$ và $\widehat{D_1}$ là cặp góc so le trong đối với hai đường thẳng nào? Cũng hỏi như vậy đối với cặp góc $\widehat{B_2}$ và $\widehat{D_2}$

Giải

a) Đối với đường thẳng AD thì $\widehat{A}$ và $\widehat{ADx}$ so le trong.

Đối với đường thẳng BC thì $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCy}$ so le trong.

b) Đối với đường thẳng xy thì cặp góc ADx và BCD đồng vị, cặp góc ADC và BCy cũng đồng vị.

Cặp góc ADC và BCD là cặp góc trong cùng phía.

Cặp góc ADx và BCy là cặp góc ngoài cùng phía.

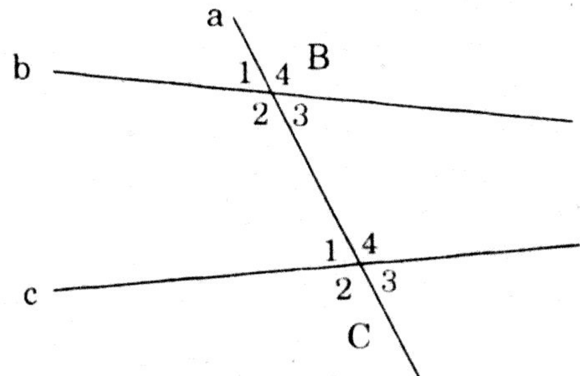
c) Cặp góc $\widehat{B_1}$ và $\widehat{D_1}$ là cặp góc so le trong của hai đường thẳng AB và CD.

Cặp góc $\widehat{B_2}$ và $\widehat{D_2}$ là cặp góc so le trong của hai đường thẳng AD và BC.

C. Luyện tập

Bài 9 Vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng b, c theo thứ tự tại B, C. Đánh số các góc đỉnh B, đỉnh C rồi viết tên hai cặp góc so le trong, bốn cặp góc đồng vị.

Hướng dẫn:



Hai cặp góc so le trong:

$\widehat{C_1}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{C_4}$ và $\widehat{B_2}$.

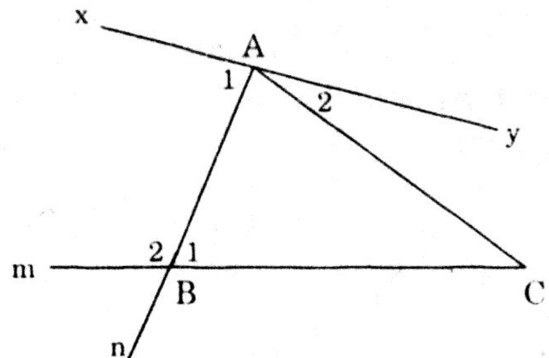
Bốn cặp góc đồng vị:

$\widehat{B_1}$ và $\widehat{C_1}$; $\widehat{B_2}$ và $\widehat{C_2}$; $\widehat{B_3}$ và $\widehat{C_3}$; $\widehat{B_4}$ và $\widehat{C_4}$.

Bài 10 Xét hai đường thẳng xy và BC trong hình, hãy cho biết:

a) Góc nào so le trong, góc nào trong cùng phía đối với góc C?

b) Góc nào so le trong, góc nào trong cùng phía, góc nào đồng vị đối với góc A_1?



Hướng dẫn giải

a) $\widehat{A_2}$ so le với $\widehat{C}$, $\widehat{CAx}$ trong cùng phía với $\widehat{C}$.

b) $\widehat{B_1}$ so le với $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_2}$ trong cùng phía với $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_3}$ đồng vị với $\widehat{A}$.

Bài 11 Hình vẽ bên. Trong các câu sau, câu nào đúng, câu nào sai?

a) $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_2$ là hai góc đồng vị.

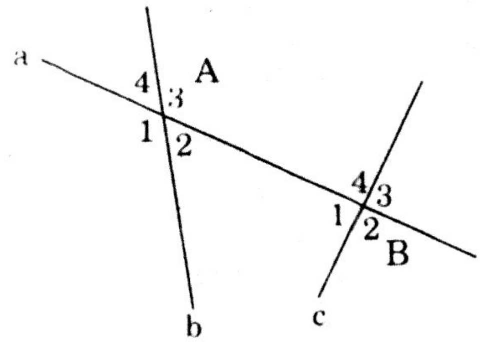
b) $\widehat{A}_3$ và $\widehat{B}_3$ là hai góc đồng vị.

c) $\widehat{A}_2$ và $\widehat{B}_4$ là hai góc so le trong.

d) $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_4$ là hai góc so le trong.

e) $\widehat{B}_1$ và $\widehat{B}_3$ là hai góc đối đỉnh.

g) $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ là hai góc bù nhau.



Hướng dẫn giải

a) Sai. b) Đúng. c) Đúng.

d) Sai. e) Đúng. g) Đúng.

§4. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Kiến thức lớp 6

– Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

– Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

Nếu đường thẳng c cắt đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau.

Ký hiệu là a // b.

B. Các bài toán

Bài 9 Tìm câu sai trong các câu sau:

a) Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

b) Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không cắt nhau.

c) Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau.

d) Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không cắt nhau, không trùng nhau.

Giải

Câu a, c, d đúng.

Câu b sai vì hai đường thẳng không cắt nhau có thể trùng nhau hoặc song song.

Vậy ta chọn câu b.

Bài 10 Chọn câu sai trong các câu sau đây:

a) Nếu a, b cắt c mà trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì a // b.

b) Nếu a, b cắt c mà trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì a // b.

c) Nếu a, b cắt c mà trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bằng nhau thì a // b.

d) Nếu a, b cắt c mà trong các góc tạo thành có một cặp góc ngoài cùng phía bù nhau thì a // b.

Giải

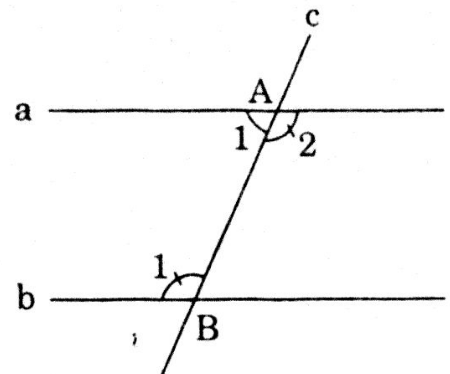
Các câu a, b, d đúng.

Câu c sai vì nếu a, b cắt c mà trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì a // b.

Ta chọn câu c.

Bài 11 Cho hai đường thẳng a và b cắt bởi đường thẳng c tại A và B. Cho biết tổng của hai góc trong cùng phía với một góc so le trong với một trong hai góc này bằng 300^0 và trong hai góc kề bù có góc này bằng gấp đôi góc kia. Hai đường thẳng a và b có song song với nhau không? Vì sao?

Giải



Giả sử $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 300^0$

Mà $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^0$ (Hai góc kề bù).

nên $\widehat{B}_1 = 120^0$

Mặt khác $\widehat{A}_2 = 2\widehat{A}_1$ (gt)

Suy ra: $3\widehat{A}_1 = 180^0$

Do đó: $\widehat{A}_1 = 60^0$; $\widehat{A}_2 = 120^0$

Vậy $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 = 120^0$ mà chúng ở vị trí so le trong nên a // b.

C. Luyện tập

Bài 12 Cho góc $\widehat{xOy} = 145^0$. Trên tia Ox lấy điểm A. Qua A vẽ tia Az sao cho tia Az và Oy nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox và $\widehat{OAz} = 35^0$.

a) Hai tia Az và Oy có song song hay không?

b) Vẽ tia Az' là tia đối với tia Az, gọi tia Om, On lần lượt là tia phân giác của các góc xOy và OAz'. Om và On có song song hay không?

Hướng dẫn giải

a) Xét xem Az và Oy có song song với nhau không?

b) Vẽ tia Az' là tia đối của tia Az. Hai tia phân giác của hai góc xOy và OAz' có song song không?

Bài 13 Chọn câu đúng trong các câu sau đây:

a) Hai đoạn thẳng song song là hai đoạn thẳng không có điểm chung.

b) Hai đoạn thẳng song song là hai đoạn thẳng không cắt nhau, không trùng nhau.

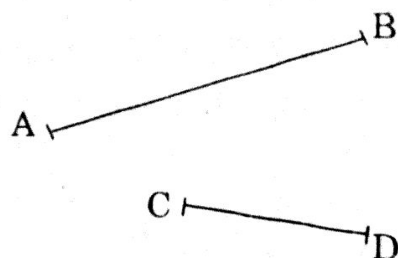
c) Hai đoạn thẳng song song là hai đoạn thẳng phân biệt không cắt nhau.

d) Hai đoạn thẳng song song là hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song.

Hướng dẫn giải

Chọn câu d.

Các câu a, b, c sai. Xem hình vẽ minh họa ở bên.



Bài 14 Cho hai đường thẳng x'x và y'y, điểm A trên tia x'x và điểm B trên tia y'y sao cho hai tia Ax và By cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB. Cho biết:

$\widehat{x'AB} + \widehat{yBA} + \widehat{BAx} = 216^0$ và $\widehat{BAx} = 4\widehat{x'AB}$.

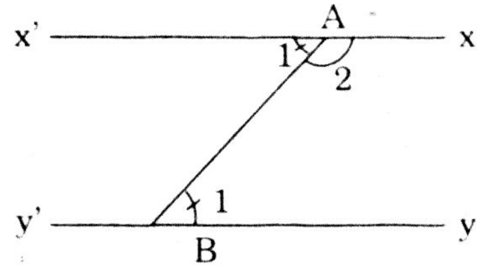
Xét xem hai đường thẳng x'x và y'y có song song với nhau không?

Hướng dẫn giải

$\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 216^0$ (1)

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^0$ (2)

$\widehat{A_2} = 4\,\widehat{A_1}$ (3)



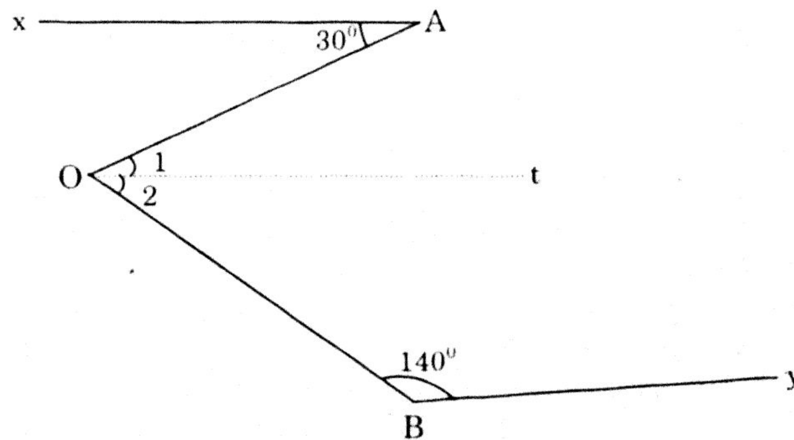
(2), (3) $\Rightarrow \widehat{A_1} = 36^0$

Như vậy: $\widehat{A_2} = 144^0$

Thay $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$ vào (1) $\Rightarrow \widehat{B_1} = 36^0$

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow$ x'x // y'y

ài 15 Cho hình vẽ bên, trong đó $\widehat{AOB} = 60^0$, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Các tia Ax, Ot và By có song song với nhau không? Vì sao?



Hướng dẫn giải

$\widehat{AOt} = 30^0$ (vì $\widehat{AOB} = 60^0$)

$\widehat{AOt} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 30^0 = \widehat{xAO} \Rightarrow$ Ax // Ot (so le trong)

$\widehat{tOB} = 30^0$

$\widehat{OBy} = 140^0$

$\Rightarrow \widehat{tOB} = \widehat{OBy} = 170^0 \neq 180^0$

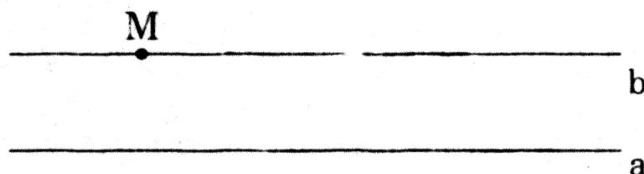
nên Ot không song song By.

§5. TIÊN ĐỀ Ơ–CLIT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Tiên đề Ơ–Clit.

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Điểm M nằm ngoài đường thẳng a, đường thẳng b đi qua M và song song với a là duy nhất.

2. Tính chất của hai đường thẳng song song.

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

a) Hai góc so le trong bằng nhau;

b) Hai góc đồng vị bằng nhau;

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

B. Các bài toán

Bài 12 Trong các câu sau, câu nào đúng, câu nào sai:

a) Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a, có hai đường thẳng song song với a.

b) Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a, có ít nhất một đường thẳng song song với a.

c) Có duy nhất một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

d) Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a, đường thẳng đi qua M và song song với a là duy nhất.

Giải

a) Sai, vì qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có duy nhất một đường thẳng song song với a.

b) Sai, vì qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có duy nhất một đường thẳng song song với a.

c) Sai, vì nhiều đường thẳng song song với a.

d) Đúng.

Bài 13 Cho $\widehat{xOy} = 120^0$ và Ot là tia phân giác của góc đó. Trên tia Oy lấy điểm A, qua A dựng đường thẳng At' // Ot.

a) Tính góc yAt'.

b) Từ A dựng đường thẳng Ax' song song với Ox. So sánh hai góc t'Ax' và tOx.

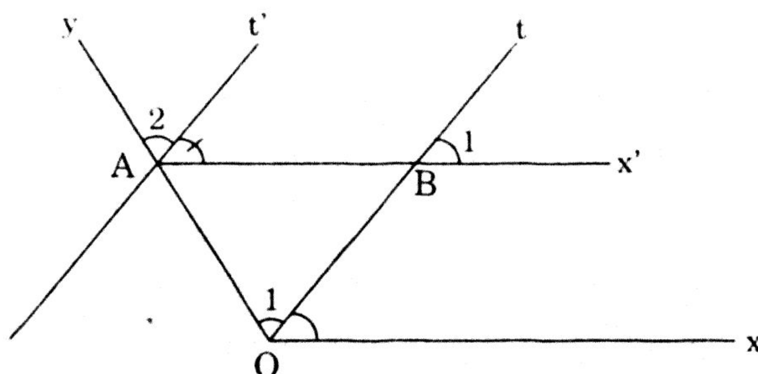
Giải

a) Ot // At' $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{A}_1$ (so le trong)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{O}_1$

$\widehat{yAt'} = \widehat{yOt} = 60^0$ (Ot là phân giác $\widehat{xOy} = 120^0$)

b) $\widehat{yAt'} = \widehat{yOt}$ (đồng vị) $\Rightarrow$ At' // Ot



Ax' cắt Ot ở B $\Rightarrow \widehat{t'Ax'} = \widehat{B}_1$ (đồng vị)

$\widehat{tOx} = \widehat{B}_1$ (đồng vị)

$\widehat{t'Ax'} = \widehat{tOx}$

Bài 14 Hai đường thẳng x'x vày'y song song với nhau bị cắt bởi một cát tuyến tại hai điểm A và B. Gọi At là tia phân giác của $\widehat{xAB}$.

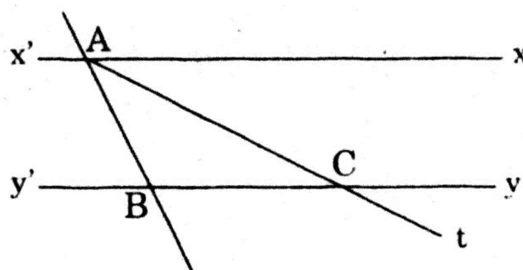
a) Tia At có cắt đường thẳng y'y hay không? Vì sao?

b) Cho $\widehat{xAB} = 80^0$. Tính $\widehat{ACB}$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử tia At không cắt y'y sr AC // y't

Theo tiên đề Ơ–Clít thì AC trùng với x'x, điều này vô lý, vì vậy tia At phải cắt y'y tại C.



b) Ta có:

$\widehat{xAt} = \frac{1}{2}\widehat{xAB} = \frac{1}{2} . 80^0 = 40^0$ (At là tia phân giác của $\widehat{xAB}$)

mà $\widehat{xAt} = \widehat{ACB}$ (so le trong)

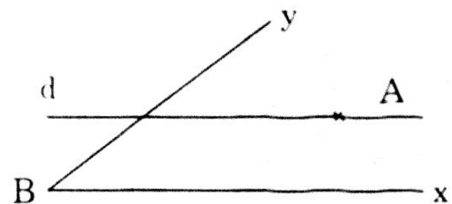
Vậy $\widehat{ACB} = 40^0$.

C. Luyện tập

Bài 16 Cho góc xOy khác góc bẹt. Một điểm A nằm trong góc đó. Qua A vẽ đường thẳng d song song với Ox. Đường thẳng d có cắt tia Oy không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Ta có d // Ox mà Ox cắt Oy ⇒ d cắt Oy (theo hệ quả d của tiên đề Ơ–Clit).

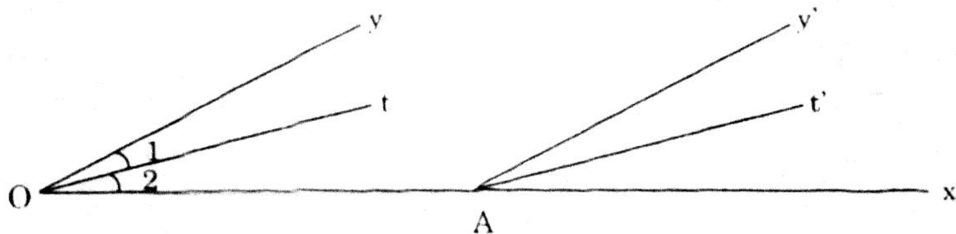


Bài 17 Cho góc xOy có số đo bằng 30^0. Một điểm A thuộc Ox. Qua A dựng tia A'y // Oy và nằm trong góc xOy.

a) Tính $\widehat{OAy'}$.

b) Gọi Ot và At' theo thứ tự là các tia phân giác của các góc xOy và xAy'. Chứng tỏ rằng Ot // At'.

Hướng dẫn giải



a) Do Ay' // Oy

$\Rightarrow \widehat{xAy'} = \widehat{xOy} = 30^0$ (đồng vị)

Lại có: $\widehat{OAy'} + \widehat{xAy'} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{OAy'} = 180^0 - \widehat{xAy'} = 180^0 - 30^0 = 150^0$

b) Do $\widehat{xOy} = \widehat{xAy'} \Rightarrow \frac{\widehat{xOy}}{2} = \frac{\widehat{xAy'}}{2}$ hay $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

$\Rightarrow$ Ot // At' (đồng vị)

Bài 18 Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a, vẽ 101 đường thẳng phân biệt. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng có 100 đường thẳng cắt a.

Hướng dẫn giải

Giả sử có 99 đường thẳng cắt a. Vậy qua A vẫn còn hai đường thẳng song song a. Điều này trái với tiên đề Ơ–Clit "Qua một điểm ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho".

Vậy qua A ngoài đường thẳng a có ít nhất 100 đường thẳng cắt đường thẳng a.

§6. TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song của ba đường thẳng:

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

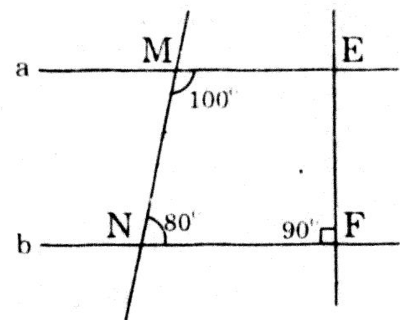
2. Ba đường thẳng song song

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Khi ba đường thẳng d, d', d" song song với nhau từng đôi một, ta nói ba đường thẳng ấy song song với nhau.

Ký hiệu là d // d' // d".

B. Các bài toán



Bài 15 Trong hình, biết $\widehat{M} = 100^0$, $\widehat{N} = 80^0$ và $F = 90^0$. Hai đường thẳng a và c có vuông góc với nhau không? Vì sao?

Ta có: $\widehat{M} + \widehat{N} = 100^0 + 80^0 = 180^0$

Suy ra a // b (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau)

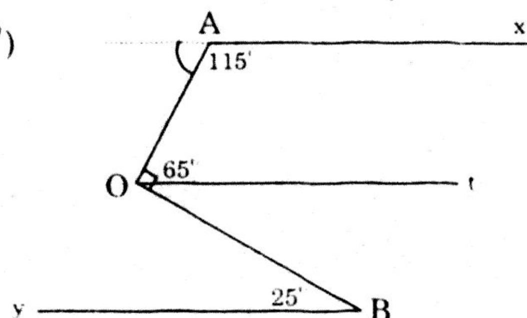
Ta có: $\widehat{F} = 90^0 \Rightarrow c \perp b$, mà a // b nên $c \perp a$

Bài 16 Hình bên cho biết $\widehat{xAO} = 115^0$; $\widehat{OBy} = 25^0$ và $OA \perp OB$.

Hai tia Ax và By có song song với nhau không?

Hướng dẫn giải

Vẽ tia Ot sao cho $\widehat{AOt} = 65^0$.



Ta có: $\widehat{x'AO} = 65^0$ (cùng bù với 115^0)

$\Rightarrow \widehat{x'AO} = \widehat{AOt} = 65^0$.

$\Rightarrow$ Ot // Ax (1)

Mặt khác:

$\widehat{tOB} = 90^0 - 65^0 = 25^0$

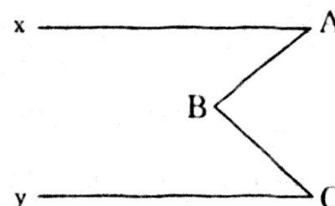
Do đó $\widehat{tOB} = \widehat{OBy} = 25^0$

$\Rightarrow$ Ot // By (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Ax // By

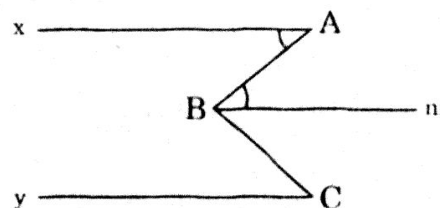
Bài 17 Trên hình bên ta có:

$\widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{C}$. Hai đường thẳng Ax và Cy có song song với nhau hay không?



Giải

Vẽ tia Bm sao cho $\widehat{ABm}$ và $\widehat{A}$ là hai góc so le trong và bằng nhau.



Ta có. $\widehat{ABm} = \widehat{A} \Rightarrow$ Ax // Bm (1)

Tia Bm nằm giữa hai tia BA và Bc nên $\widehat{ABC} = \widehat{ABm} + \widehat{CBm}$

hay $\widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{C}$ (gt)

Suy ra $\widehat{C} = \widehat{CBm}$

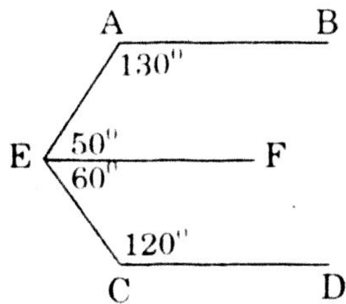
Hai góc C và CBm bằng nhau ở vị trí so le trong

nên Cy // Bm (2)

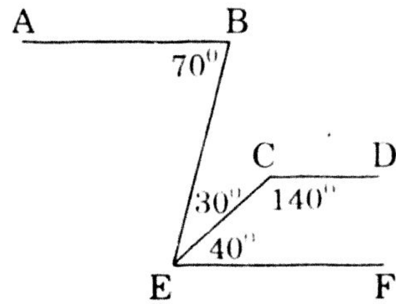
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Ax // Cy.

Bài 18 Xem hình dưới đây, cho biết AB và CD có song song với nhau không?

a)



b)



Giải

a) AB // EF vì có hai góc trong cùng phía bù nhau

($130^0 + 50^0 = 180^0$)

EF // CD vì có hai góc trong cùng phía bù nhau

($60^0 + 120^0 = 180^0$)

Vậy AB // CD

b) AB // EF vì có cặp góc so le trong bằng nhau

($70^0 = 30^0 + 40^0$)

CD // EF vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau

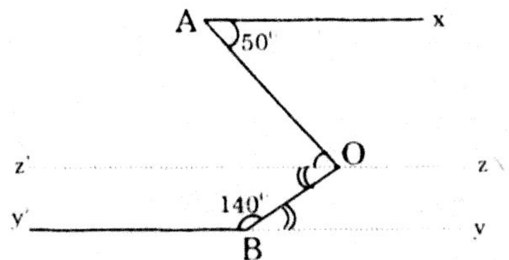
($140^0 + 40^0 = 180^0$)

Vậy AB // CD.

C. Luyện tập

Bài 19 Cho hình vẽ, biết $\widehat{A} = 50^0$ và $\widehat{B} = 140^0$, Ax // By'.

Hãy tính xem góc AOB bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải

Vẽ Oz // Ax, ta có:

$\widehat{AOz'} = \widehat{xAO} = 50^0$ (so le trong)

$\widehat{OBy'} = 140^0 \Rightarrow \widehat{OBy} = 180^0 - 140^0 = 40^0$

Oz // Ax $\Rightarrow$ Oz // By

$\Rightarrow \widehat{BOz'} = \widehat{OBy} = 40^0$ (so le trong)

Do đó: $\widehat{AOz'} + \widehat{z'OB} = 50^0 + 40^0 = 90^0$ hay $\widehat{AOB} = 90^0$

Bài 20 Cho hình bên, biết Ax // By. Hãy tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$?

Hướng dẫn giải

Vẽ qua C đường thẳng Cz // Ax

$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{ACz} = 180^0$

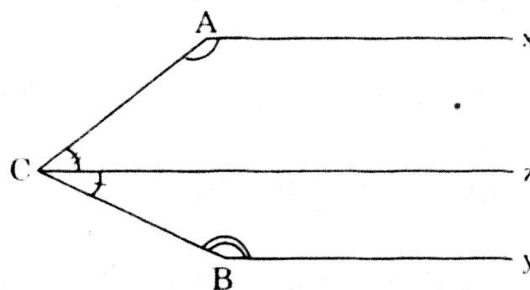
Lại có: Cz // Ax

$\Rightarrow$ Cz // By

$\Rightarrow \widehat{B} + zCB = 180^0$

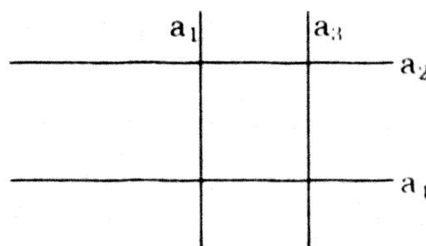
$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + ACz + zCB = 360^0$

Hay $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^0$



Bài 21 Cho bốn đường thẳng a_1; a_2; a_3; a_4. Cho biết $a_1 \perp a_2$; $a_2 \perp a_3$; $a_3 \perp a_4$. Hỏi a_1 và a_3; a_2 và a_4 có song song với nhau không? Vì sao?

Hướng dẫn giải



a_1 và a_3 cùng vuông góc với a_2 nên a_1 // a_3; a_2 và a_4 cùng vuông góc với a_3 nên a_2 // a_4.

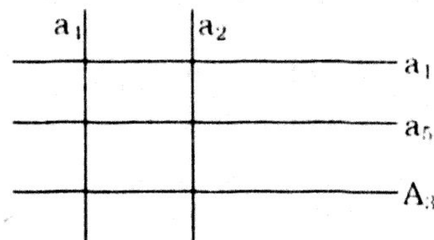
Bài 22 Cho năm đường thẳng a_1; a_2; a_3; a_4, a_5 sao cho $a_1 \perp a_2$; $a_2 \perp a_3$; $a_3 \perp a_4$ và $a_4 \perp a_5$.

Các đường thẳng a_1 và a_5 có song song với nhau không?

Hướng dẫn giải

a_1 // a_3 vì cùng vuông góc với a_2. Vì $a_3 \perp a_4$ nên $a_1 \perp a_4$. Do đó a_1 và a_5 cùng vuông góc với a_4.

Vậy a_1 // a_5



Bài 23 Cho góc xOy va hai điểm A ∈ Ox, B ∈ Oy (A và B khác điểm O). Qua các điểm A và B kẻ các đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với Ox và Oy. Có nhận xét gì về hai đường thẳng a và b?

Hướng dẫn giải

Xét ba trường hợp:

a) Trường hợp $\widehat{xOy} < 180^0$:

Giả sử hai đường thẳng a và b song song với nhau. Vì a ⊥ Ox, mà a // b nên b ⊥ Ox. Như vậy qua điểm O ta dựng được hai đường thẳng phân biệt chứa hai tia Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng b. Điều này vô lý. Vậy đường thẳng a cắt đường thẳng b.

b) Trường hợp $\widehat{xOy} = 180^0$ thì hai tia Ox và Oy nằm trên một đường thẳng. Hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng này nên a// b.

c) Trường hợp $\widehat{xOy} = 90^0$ thì Ox ⊥ Oy, mà a ⊥ Ox, nên a // Oy, vì b ⊥ Oy và a // Oy do đó a ⊥ b.

§7. ĐỊNH LÝ

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Định lý:

– Định lý là khẳng định suy ra từ những khẳng định đúng.

– Định lý thường được phát biểu dưới dạng "Nếu A thì B".

A là giả thiết (GT), B là kết luận (KL).

2. Chứng minh định lý:

Chứng minh định lý là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

Các bước khi chứng minh định lý:

– Vẽ hình.

– Ghi giả thiết, kết luận.

– Nếu các bước chứng minh. Mỗi bước gồm một khẳng định và căn cứ của khẳng định đó.

B. Các bài toán

Bài 19 Hãy điền vào chỗ trống bằng những nội dung thích hợp để được các định lý:

a) Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì ...

b) Nếu ... thì $MA = MB = \frac{1}{2} AB$

c) Nếu tia Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ thì ...

d) Nếu ... thì $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \frac{1}{2} \widehat{xOy}$

e) Nếu $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$ là hai góc đối đỉnh thì ...

Giải

a) Có thể điền vào chỗ trống theo vài cách sau đây:

– M nằm giữa A và B.

– MA = MB

– $MA = MB = \frac{1}{2} AB$

– M nằm giữa A, B và MA = MB

– MA + MB = AB và MA = MB

b) Chỉ có một cách điền vào chỗ trống: M là trung điểm của đoạn AB.

c) Có thể điền vào chỗ trống theo vài cách sau đây:

– Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy.

– $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$

– $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \frac{1}{2} \widehat{xOy}$

– Ot nằm giữa hai tia Ox, Oy và $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$

– $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$ và $\widehat{xOt} + \widehat{tOy} = \widehat{xOy}$

d) Chỉ có một cách điền vào chỗ trống: Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

e) Có thể điền như sau: chúng bằng nhau.

*** Nhận xét:**

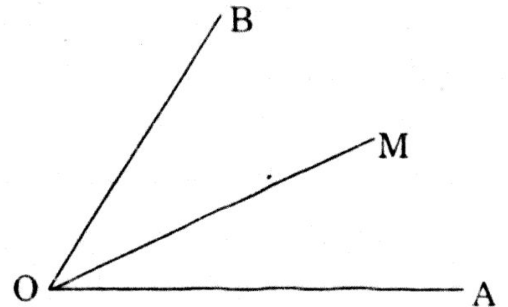
Ở các câu a, c, e còn có thể điền theo nội dung khác.

Bài 20 Xét khẳng định: "Số đo của góc tạo bởi tia phân giác với mỗi cạnh của góc bằng nửa số đo của góc ấy".

a) Phát biểu khẳng định trên dưới dạng định lý: "nếu ... thì...".

b) Hãy chứng minh định lý đó.

Hướng dẫn giải



a) Nếu OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ thì:

$\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$

b) Chứng minh: CM là phân giác của góc AOB nên:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MOA} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB}\\ \widehat{MOA} + \widehat{MOB}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\,\widehat{MOA} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{MOA} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$$

Mà $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ nên $\widehat{MOB} = = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$

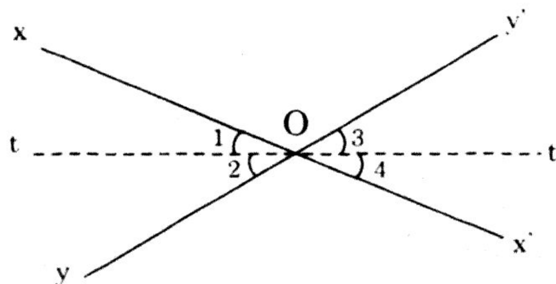
Bài 21 Xác định giả thiết và kết luận rồi chứng minh định lý sau: "Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau".

Giải

Ký hiệu như hình vẽ.

Giả thiết:

$$\begin{cases} \widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 180^0 \\ \widehat{yOx'} + \widehat{x'Oy'} = 180^0 \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \dfrac{1}{2}\widehat{xOy} \\ \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \dfrac{1}{2}\widehat{x'Oy'} \end{cases}$$



Kết luận: $\widehat{O}_1 + \widehat{xOy'} + \widehat{O}_4 = 180^0$

Thật vậy: $\widehat{O}_1 + \widehat{xOy'} + \widehat{O}_4 = \dfrac{1}{2}\widehat{xOy} + \widehat{xOy'} + \dfrac{1}{2}\widehat{x'Oy'}$

$= \dfrac{1}{2}(\widehat{xOy} + \widehat{yOx'} + \widehat{x'Oy'} + \widehat{y'Ox})$ ($\widehat{y'Ox} = \widehat{yOx'}$ vì đối đỉnh)

$= \dfrac{1}{2} . 360^0 = 180^0$ tức Ot và Ot' là hai tia đối nhau.

C. Luyện tập

Bài 24 Cho biết rằng: Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Có thể khẳng định rằng hai góc bằng nhau thì đối đỉnh được không?

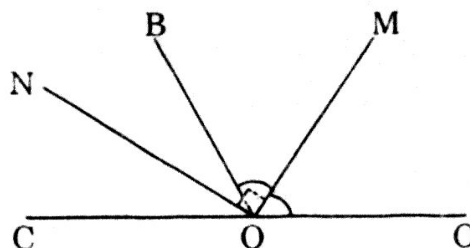
Hướng dẫn giải

Không thể khẳng định được (vì hai góc bằng nhau thì có thể không đối đỉnh).

Bài 25 Cho hai góc kề bù $\widehat{ACB}$ và $\widehat{BOC}$. Gọi OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Trong góc $\widehat{BOC}$, vẽ tia ON. Chứng minh rằng: Nếu ON vuông góc với OM thì tia ON là tia phân giác góc $\widehat{BOC}$.

Hướng dẫn giải

Nhớ lại rằng hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.



Bài 26 Luyện tập diễn đạt các định lý bằng cách điền vào chỗ trống nội dung thích hợp:

a) Nếu AB > CD và CD > EG thì....

b) Trên một đường thẳng cho bốn điểm A, B, C, D sắp xếp theo thứ tự đó. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng BC đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng AD thì ... và ...

c) Nếu hai góc kề bù nhau mà bằng nhau thì ...

Hướng dẫn giải

a) AB > EG

b) A B I C D

I là trung điểm của BC và AD.

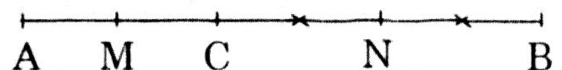
c) Hai góc đó là hai góc vuông.

Bài 27 Cho khẳng định sau: "C là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC; N là trung điểm của đoạn BC thế thì $MN = \frac{1}{2}AB$". Hãy chứng minh.

Hướng dẫn giải

Ta có M là trung điểm của đoạn AC nên M thuộc tia AC, tương tự N thuộc tia BC.

Hai tia CA, CB là hai tia đối nhau (do C nằm giữa AB)



⇒ C nằm giữa M và N (hình bên)

Lại có: $\left.\begin{array}{l} MC = \frac{1}{2}AC \\ NC = \frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \Rightarrow MC + NC = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC$

$$= \frac{1}{2}(AC + BC) = \frac{1}{2}AB$$

hay $MN = \frac{1}{2}AB$.

Chương II

TAM GIÁC

§1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. Lý thuyết

1. Tổng ba góc của một tam giác:

Định lý: Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0.

$$\Delta ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$$

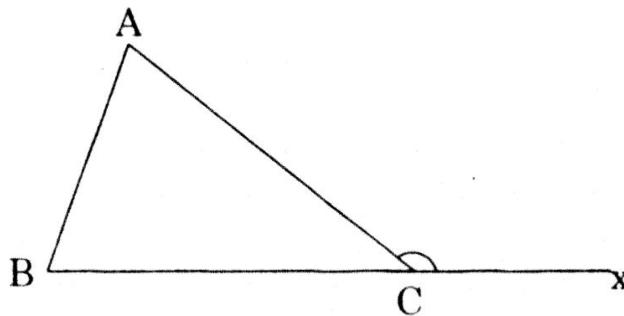
2. Áp dụng vào tam giác vuông:

Định lý: Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$$\Delta ABC, \widehat{A} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$$

3. Góc ngoài của tam giác:

Định nghĩa: Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.



$\widehat{ACx}$ là góc ngoài của ΔABC

Định lý: Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

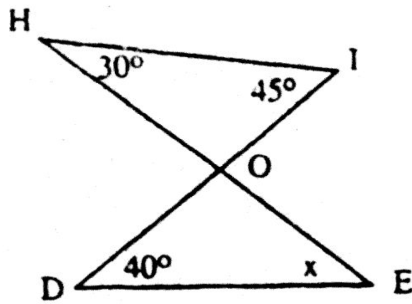
$$\Delta ABC, \widehat{ACx} \text{ là góc ngoài} \Rightarrow \widehat{ACx} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

Nhận xét: Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

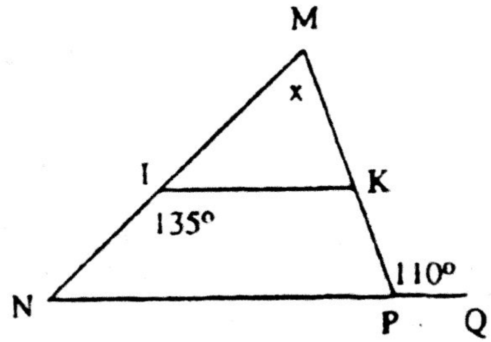
$$\Delta ABC, \widehat{ACx} \text{ là góc ngoài} \Rightarrow \widehat{ACx} > \widehat{A}, \widehat{ACx} > \widehat{B}$$

B. Các bài toán

Bài 1 Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả A, B, C, D.



Hình a



Hình b

a) Hình a

A. $x = 65^0$; B. $x = 35^0$

C. $x = 45^0$; D. $x = 30^0$

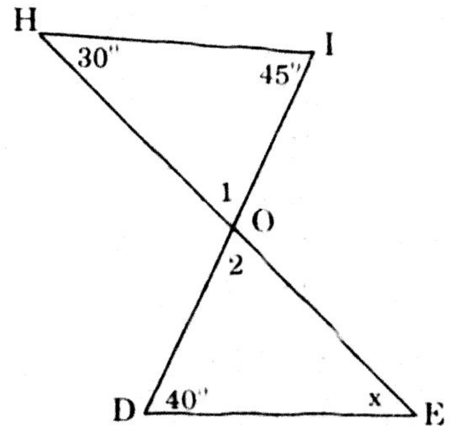
b) Hình b

A. $x = 70^0$; B. $x = 55^0$

C. $x = 65^0$; D. $x = 25^0$

Giải

a) Kết quả B là đúng.



Thật vậy, vì $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (đối đỉnh)

Nên $\widehat{O_2} = 180^0 - (30^0 + 45^0)$

$\widehat{O_2} = 180^0 - 70^0 = 105^0$

Do đó $x = 180^0 - (40^0 + \widehat{O_2})$

$= 180^0 - (40^0 + 105^0)$

$= 180^0 - 145^0 = 35^0$

b) Kết quả C là đúng.

$\widehat{I_1} + 135^0 = 180^0$ (2 góc kề bù)

Nên $\widehat{I_1} = 180^0 - 135^0 = 45^0$

$\widehat{P_1} + 110^0 = 180^0$ (2 góc kề bù)

nên $\widehat{P_1} = 180^0 - 110^0 = 70^0$

Do đó $\widehat{K_1} = \widehat{P_1} = 70^0$ (đồng vị)

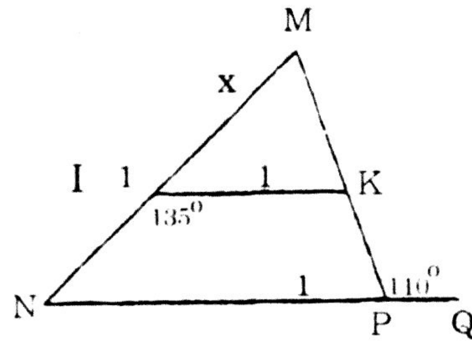
Trong Δ MIK có:

$x + \widehat{I_1} + \widehat{K_1} = 180^0$

$x + 45^0 + 70^0 = 180^0$

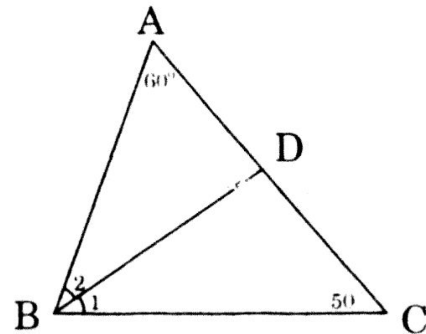
$\Rightarrow x = 180^0 - (45^0 + 70^0)$

$x = 180^0 - 115^0 \Rightarrow x = 65^0$



Bài 2 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{C} = 50^0$. Tia phân giác của góc $\widehat{B}$ cắt AC ở D. Tính $\widehat{ADB}$, $\widehat{CDB}$.

Giải



Xét tam giác ABC có:

$\widehat{B} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{C})$

$= 180^0 - (60^0 + 50^0) = 70^0$

Do BD là tia phân giác của góc B nên:

$\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot 70^0 = 35^0$

$\widehat{ADB}$ là góc ngoài ở đỉnh D của tam giác DBC nên:

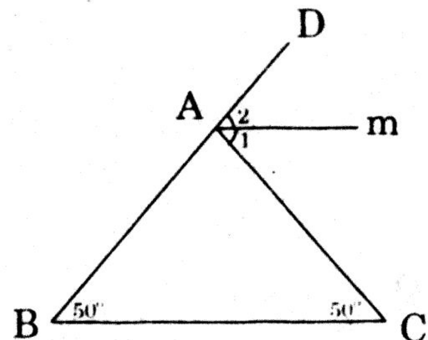
$\widehat{ADB} = \widehat{B_1} + \widehat{C} = 35^0 + 50^0 = 85^0$

Suy ra $\widehat{BDC} = 180^0 - \widehat{ADB} = 180^0 - 85^0 = 95^0$

Vậy $\widehat{ADB} = 85^0$; $\widehat{CDB} = 95^0$

Bài 3 Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^0$. Gọi Am là tia phân giác của góc ngoài ở đỉnh A. Hãy chứng tỏ rằng Am // BC.

Giải



Ta có $\widehat{CAD}$ là góc ngoài của tam giác ABC nên:

$\widehat{CAD} = \widehat{B} + \widehat{C} = 50^0 + 50^0 = 100^0$

Am là tia phân giác của góc CAD nên:

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2}\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \cdot 100^0 = 50^0$

Hai đường thẳng Am và BC tạo với AC hai góc so le trong bằng nhau: $\widehat{A_1} = \widehat{C} = 50^0$ suy ra Am // BC.

Bài 4 Cho tam giác ABC vuông ở A . Vẽ đường cao AH. Chứng minh rằng:

a) H nằm giữa B và C

b) $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{HAB} = \widehat{ACB}$

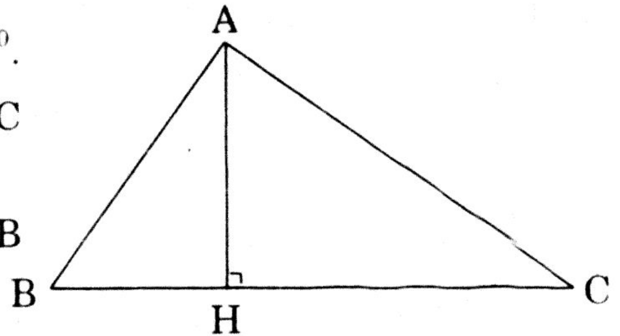
Giải

a) Trong ΔABC:

Vì $\widehat{A} = 90^0$ nên $\widehat{B} < 90^0$; $\widehat{C} < 90^0$.

Vì $\widehat{B} < 90^0$ nên H thuộc tia BC và khác B.

Vì $\widehat{C} < 90^0$ nên H thuộc tia CB và khác C.



Suy ra H nằm giữa B và C.

b) Vì $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$ (ΔABC vuông ở A)

Nên $\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{ACB}$ (1)

Vì $\widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^0$ (ΔHAC vuông tại H)

nên $\widehat{HAC} = 90^0 - \widehat{HCA}$ hay $\widehat{HAC} = 90^0 - \widehat{ACB}$ (2)

Suy ra: $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$

Lý luận tương tự đối với hai tam giác ABC và HBA, ta có:

$\widehat{HAB} = \widehat{ACB}$

C. Luyện tập

Bài 1 Tìm số đo của các góc của tam giác ABC, biết:

$6\widehat{A} = 14\widehat{B} = 21\widehat{C}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{\widehat{A}}{7} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{2}$

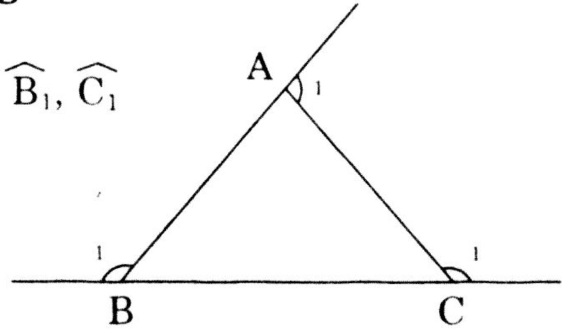
Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{\widehat{A}}{7} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2 + 3 + 7} = \frac{180^0}{12} = 150^0$$

Suy ra: $\widehat{A} = 105^0$; $\widehat{B} = 45^0$; $\widehat{C} = 30^0$

Bài 2 Chứng minh rằng tổng ba góc ngoài của một tam giác bằng 360^0.

Hướng dẫn giải



Gọi các góc ngoài của ΔABC là $\widehat{A_1}, \widehat{B_1}, \widehat{C_1}$

Ta có: $\widehat{A_1} = 180^0 - \widehat{A}$

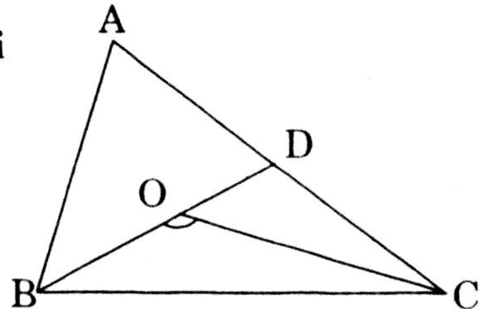
$\widehat{B_1} = 180^0 - \widehat{B}$

$\widehat{C_1} = 180^0 - \widehat{C}$

Suy ra: $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 3.180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = 360^0$

Bài 3 Cho điểm O trong Δ ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BOC} > A$.

Hướng dẫn giải



Kéo dài BO cắt AC tại D

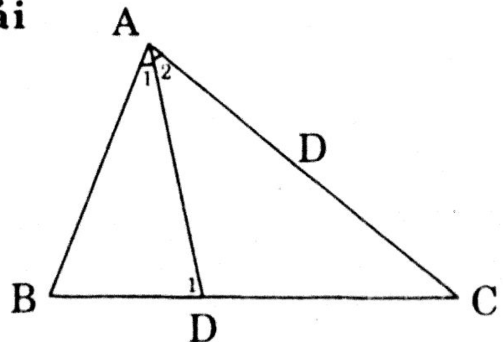
Ta có: $\widehat{BOC} = \widehat{BDC} + \widehat{DCO}$

và $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABD}$

Suy ra: $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABD} + \widehat{DCO} > \widehat{A}$

Bài 4 Cho tam giác ABC biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^0$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC ở D. Tính $\widehat{ADB}$?

Hướng dẫn giải



Trong ΔABD có: $\widehat{A_1} + \widehat{B} + \widehat{D_1} = 180^0$

và: $\widehat{D_1} = \widehat{A_2} + \widehat{C}; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Suy ra: $\widehat{D_1} - \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{D_1} = 180^0$

$\Rightarrow 2\widehat{D_1} + (\widehat{B} - \widehat{C}) = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{D_1} = 75^0$

Bài 5 Cho tam giác ABC vẽ tia phân giác AD của góc $\widehat{A}$, biết $\widehat{ADB} = 80^0; \widehat{B} = \frac{3}{2}\widehat{C}$. Tính các góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

$$\widehat{ADB} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} = 80^0 - \widehat{C}$$

$\Rightarrow \widehat{A} = 160^0 - 2\widehat{C}$

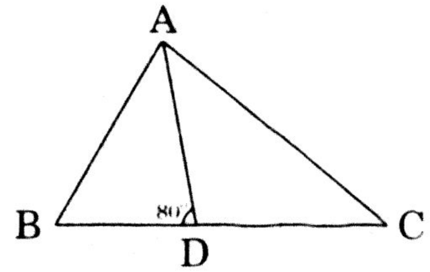
và $\widehat{B} = \dfrac{3}{2}\widehat{C}$

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

$\Rightarrow 160^0 - 2\widehat{C} + \dfrac{3}{2}\widehat{C} + \widehat{C} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{C} = 40^0$

Vậy $\widehat{A} = 80^0; \widehat{B} = 60^0; \widehat{C} = 40^0$



Bài 6 Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Đường thẳng chứa tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường thẳng BC ở E.

a) Chứng minh $\widehat{AEB} = \dfrac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$

b) Từ B vẽ đường thẳng song song với AE cắt cạnh AC ở K. Chứng minh tam giác ABK có hai góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải

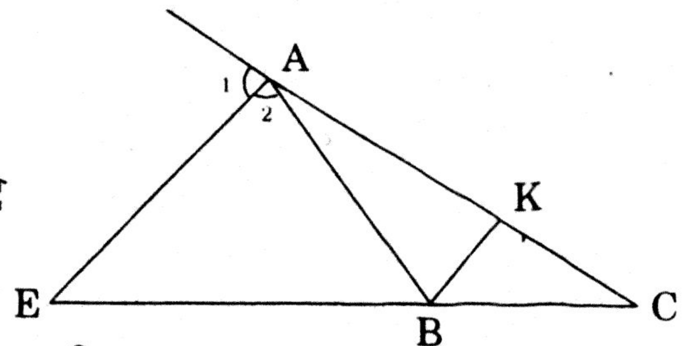
a) $\widehat{A_1} = \widehat{C} + \widehat{E}$

$\widehat{B} = \widehat{A_2} + \widehat{E}$

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

nên $\widehat{B} = \widehat{A_1} + \widehat{E} = \widehat{C} + 2\widehat{E}$

$\Rightarrow \widehat{E} = \dfrac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$



b) $\widehat{A_2} = \widehat{ABK}$ (AE // BK); $\widehat{A_1} = \widehat{AKB}$

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{AKB}$

§2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Định nghĩa:

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác mà ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia và ba góc đối diện với ba cạnh ấy của tam giác này bằng ba góc đối diện với ba cạnh ấy của tam giác kia.

2. Kí hiệu:

Để kí hiệu sự bằng nhau của tam giác ABC và tam giác A'B'C' ta viết $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

3. Qui ước:

Khi kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác, các chữ cái chỉ tên các đỉnh tương ứng được viết theo cùng thứ tự.

$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow BC = B'C', AC = A'C', AB = A'B'$

$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$

B. Các bài toán

Bài 5 Cho $\Delta ABC = \Delta DMN$

a) Viết đẳng thức trên dưới một vài dạng khác.

b) Viết các cặp cạnh bằng nhau, các cặp góc bằng nhau.

Giải

a) Đẳng thức $\Delta ABC = \Delta DMN$ có thể viết dưới vài dạng như sau:

$\Delta ACB = \Delta DNM; \Delta BAC = \Delta MND;$

$\Delta BAC = \Delta MND; \Delta CAB = \Delta NDM;$

$\Delta CBA = \Delta NMD$

b) $\Delta ABC = \Delta DMN$ suy ra:

$\widehat{A} = \widehat{D}; \widehat{B} = \widehat{M}; \widehat{C} = \widehat{N}$

$AB = DM; AC = DN; BC = MN$

Bài 6 Cho hai tam giác bằng nhau ABC và DEG.

a) Biết $\widehat{A} = 20^0, \widehat{C} = 60^0$ và $\widehat{E} = 100^0$. Tìm số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

b) Biết DG = 5cm, có thể tìm được độ dài của cạnh nào của tam giác ABC?

Giải

a) Vì $\Delta ABC = \Delta DEG$ nên:

$\widehat{A} = \widehat{D} = 20^0; \widehat{B} = \widehat{E} = 100^0; \widehat{C} = \widehat{G} = 60^0$

b) Dễ thấy AC = DG = 5cm. Vậy có thể tìm được độ dài của cạnh AC = 5cm.

C. Luyện tập

Bài 7 Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$. Trong các cách viết sau đây, cách nào viết đúng qui ước?

a) $\Delta ABC = \Delta DFE$ b) $\Delta BAC = \Delta EFD$

c) $\Delta CBA = \Delta FED$ d) $\Delta CAB = \Delta FDE$

Hướng dẫn giải

Cách viết c, d đúng qui ước.

Bài 8 Cho biết $\Delta PQR = \Delta ACB$, $\Delta PQR = \Delta ABC$. Chứng minh rằng ΔABC có hai cạnh bằng nhau.

Hướng dẫn giải

$$\left.\begin{array}{l}\Delta PQR = \Delta ACB \Rightarrow PQ = AC \\ \Delta PQR = \Delta ABC \Rightarrow PQ = AB\end{array}\right\} \Rightarrow AB = AC$$

Bài 9 Cho $\Delta MNP = \Delta DEF$; $\Delta DEF = \Delta IHK$. Chứng minh rằng $\Delta MNP = \Delta IHK$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất bắc cầu.

Bài 10 Cho $\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta MNP$.

a) Nếu ΔABC vuông ở A thì các tam giác kia có vuông không? Nếu có thì vuông ở đỉnh nào?

b) Cho biết thêm $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{E} = 70^0$; $\widehat{P} = 50^0$. Hãy xác định các góc còn lại của mỗi tam giác.

c) Biết rằng BC = 3cm; FD = 4cm; MN = 5cm. Hãy xác định các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{M} = 90^0$

b) $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{M} = 60^0$; $\widehat{B} = \widehat{E} = \widehat{N} = 70^0$; $\widehat{C} = \widehat{F} = \widehat{P} = 50^0$

c) AB = DE = MN = 5cm

BC = EF = NP = 3cm

CA = FD = PM = 4cm

Bài 11 Cho tam giác ABC có chu vi bằng 21cm. Độ dài ba cạnh là ba số lẻ liên tiếp và AB < BC < CA. Tìm độ dài các cạnh của tam giác PQR biết $\Delta ABC = \Delta PQR$.

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài cạnh AB là $2n - 1$ thì độ dài BC là $2n + 1$, độ dài cạnh CA là $2n + 3$.

Ta có: $AB + BC + CA = 21 \Rightarrow n = 3$

nên AB = 5cm; BC = 7cm; CA = 9cm

$\Delta ABC = \Delta PQR$ nên PQ = AB = 5cm

QR = BC = 7cm; RP = CA = 9cm

Bài 12 Cho ba điểm phân biệt thẳng hàng B, M, C theo thứ tự đó và một điểm A nằm ngoài đường thẳng chứa B, M, C. Cho biết $\Delta ABM = \Delta ACM$. Chứng minh:

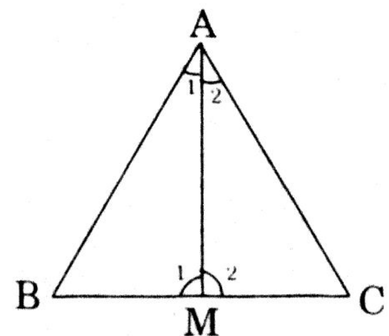
a) $AB = AC; \widehat{B} = \widehat{C}$

b) $AM \perp BC$

c) M là trung điểm của BC.

d) Tia AM là tia phân giác của góc A.

Hướng dẫn giải



a) $\Delta ABM = \Delta ACM$

$\Rightarrow AB = AC; \widehat{B} = \widehat{C}$

b) $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}; \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^0$

Suy ra: $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^0$ nên $AM \perp BC$

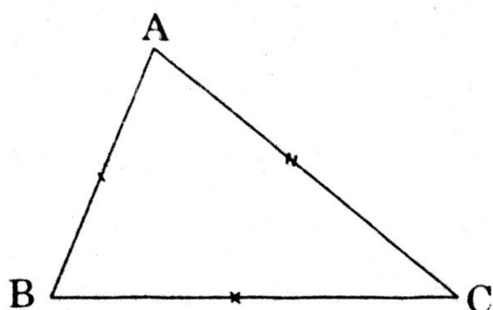
c) M nằm giữa BC, MB = MC

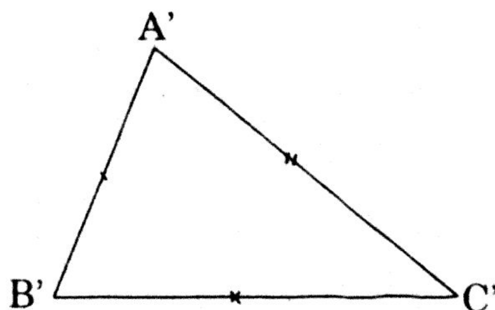
d) $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A}$

§3. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC: CẠNH – CẠNH – CẠNH (C.C.C)

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.





Nếu ΔABC và ΔA'B'C' có:

AB = A'B'; AC = A'C'; BC = B'C'

thì Δ ABC = Δ A'B'C' (c.c.c)

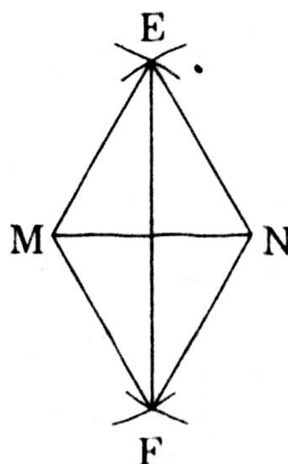
B. Các bài toán

Bài 7 Cho đoạn thẳng MN. Vẽ cung tròn tâm M bán kính MN và cung tròn tâm N bán kính NM, chúng cắt nhau tại E, F. Chứng minh:

a) ΔMNE = ΔMNF

b) ΔMEF = ΔNEF

Giải



a) Xét Δ MNE và Δ MNF có:

MN cạnh chung

ME = MF (bán kính)

NE = NF (bán kính)

Vậy Δ MNE = Δ MNF (c.c.c)

b) Nối EF. Xét Δ MEF và Δ NEF có:

EF cạnh chung

ME = NF (bán kính)

MF = NF (bán kính)

Vậy Δ MEF = Δ NEF (c.c.c.)

Bài 8 Cho hai tam giác ABC và ABD có AB = BC = CA, AD = BD (C và D nằm khác phía đối với AB). Chứng minh rằng CAD = CBD.

Giải

Δ $\widehat{CAD}$ và Δ $\widehat{CBD}$ có:

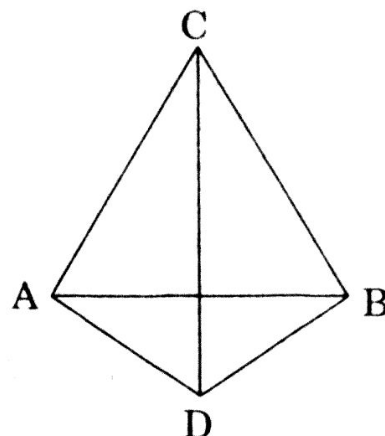
AB cạnh chung.

AC = BC (gt)

AD = BD (gt)

Do đó Δ CAD = Δ CBD (c.c.c)

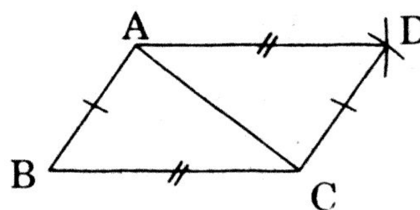
Suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (hai góc tương ứng)



C. Luyện tập

Bài 13 Cho tam giác ABC. Vẽ cung tròn tâm A bán kính bằng BC, vẽ cung tròn tâm C bán kính bằng BA, chúng cắt nhau ở D (D và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng: AD // BC.

Hướng dẫn giải



Δ ABC = Δ CDA (c.c.c) nên:.

ACB = CAD (so le trong)

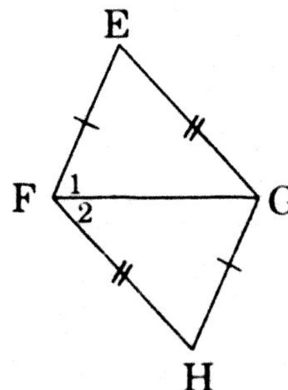
Vậy AD // BC.

Bài 14 Cho hình vẽ bên. Tìm chỗ sai trong bài làm sau đây của một học sinh.

Δ EFG = Δ HGF (c.c.c)

Suy ra $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ (góc tương ứng)

Nên FG là tia phân giác của góc $\widehat{EFH}$.



Hướng dẫn giải

Học sinh sai ở chỗ suy ra $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ vì đây không phải là góc tương ứng.

Do đó không suy ra được FG là tia phân giác của $\widehat{EFH}$.

Bài 15 Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy người ta lấy theo thứ tự hai điểm A và B sao cho OA = OB. Dựng đường tròn tâm A, bán kính AO và đường tròn tâm B, bán kính BO. Hai đường tròn này cắt nhau tại một điểm thứ hai I.

Chứng minh rằng tia OI là tia phân giác của góc xOy.

Hướng dẫn giải

Vì BI = BO mà có AI = AO, BI = BO

nên suy ra AI = BI = AO = BO.

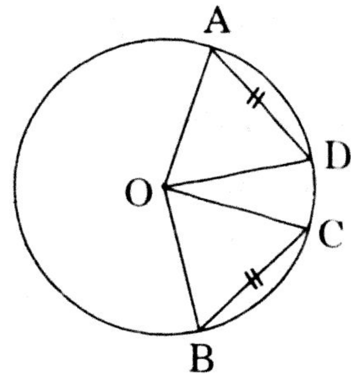
ΔOAI = ΔOBI (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AOI} = \widehat{BOI}$.

Bài 16 Trên đường tròn tâm O, bán kính R lấy bốn điểm A, B, C, D sao cho BC = AD. Chứng minh:

a) ΔOBC = ΔOAD

b) A = B = C = D

Hướng dẫn giải



a) BC = AD (gt)

OB = OA (bán kính)

OC = OD (bán kính)

b) Δ OBC = Δ OAD (c.c.c) suy ra:

$\widehat{B} = \widehat{A}$; $\widehat{C} = \widehat{D}$

Δ OBC = Δ ODA (c.c.c) suy ra:

$\widehat{B} = \widehat{D}$; $\widehat{A} = \widehat{C}$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}$

§4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC: CẠNH – GÓC – CẠNH (C.G.C)

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

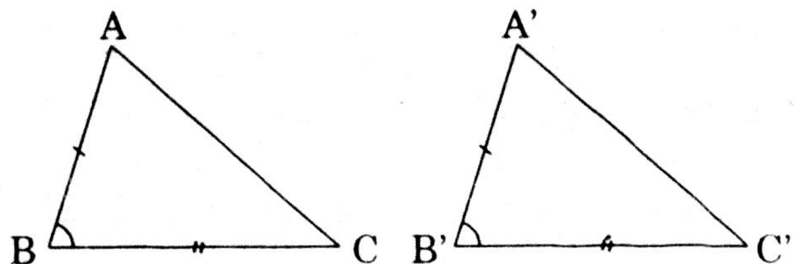
Nếu ΔABC và ΔA'B'C' có:

AB = A'B'

$\widehat{B} = \widehat{B'}$

BC = B'C'

thì ΔABC = ΔA'B'C'



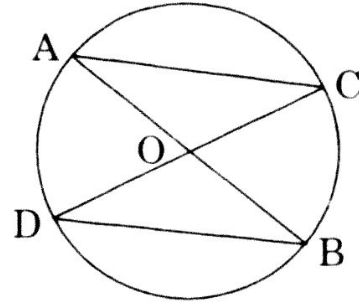
2. *Hệ quả:*

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B. Các bài toán

Bài 9 Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AB và CD. Chứng minh rằng AC = BD.

Giải



ΔAOC và ΔBOD có:

OA = OB (bán kính)

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (đối đỉnh)

OC = OD

Nên $\Delta AOC = \Delta BOD$ (c.g.c)

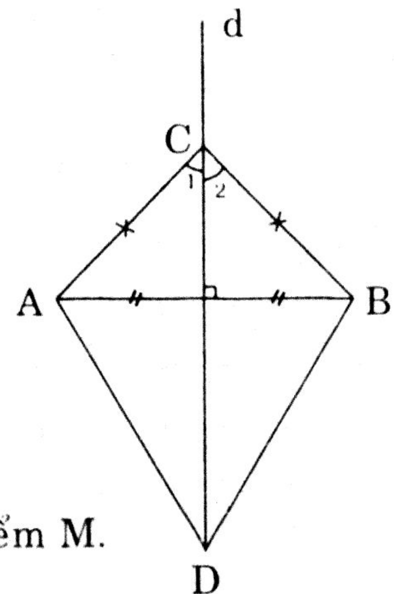
Vậy AC = BD (cạnh tương ứng)

Bài 10 Cho đoạn thẳng AB. M là trung điểm. Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với AB. Trên d lấy các điểm C và D. Chứng minh rằng:

a) AC = BC

b) $\Delta ACD = \Delta BCD$.

Giải



a) Xét ΔAMC và ΔBMC có:

CM chung

$\widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 90^0$

MA = MB (M là trung điểm của AB)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta BMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ AC = BC

b) Trường hợp C, D ở khác phía đối với điểm M.

Từ $\Delta AMC = \Delta BMC \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

Xét ΔACD và ΔBCD có:

CD chung

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (chứng minh trên)

AC = BC (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD$ (c.g.c)

* Trường hợp C, D ở cùng phía đối với M. Chứng minh tương tự.

C. Luyện tập

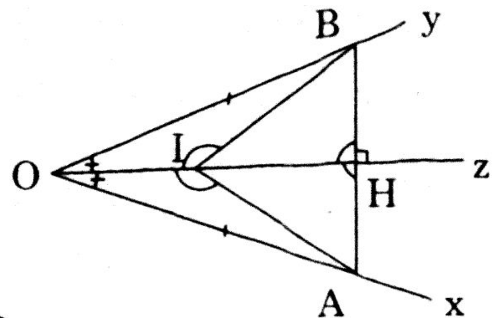
Bài 17 Cho góc xOy với điểm I trên tia phân giác Oz, lấy A trên Ox, B trên Oy sao cho OA = OB.

a) Chứng minh rằng $\Delta AOI = \Delta BOI$.

b) Đoạn thẳng AB cắt Oz tại H. Chứng minh rằng $\Delta AIH = \Delta BIH$.

c) Chứng minh rằng các tam giác AIH và BIH đều là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải



a) $\Delta AOI = \Delta BOI$ (c.g.c) vì:

OI chung

OA = OB

AOI = BOI

b) IA = IB, $\widehat{AIO} = \widehat{BIO}$

mà $\widehat{AIH}$ kề bù $\widehat{AIO}$, $\widehat{BIH}$ kề bù $\widehat{BIC}$

$\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{BIH}$

và IH cạnh chung

nên $\Delta AIH = \Delta BIH$.

c) $\widehat{AHI} = \widehat{BHI}$ và $\widehat{AHI}$ và $\widehat{BHI} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{BHI} = 90^0$

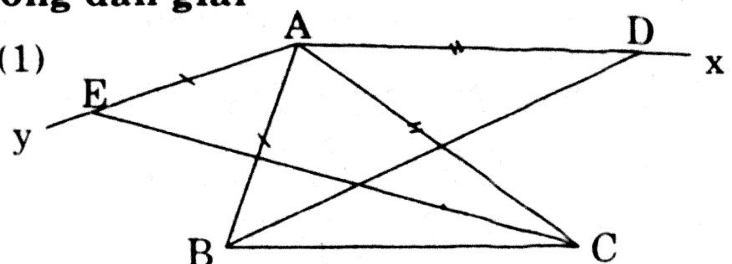
Các tam giác AIH, BIH là các tam giác vuông tại H.

Bài 18 Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng không chứa B có bờ AC vẽ tia Ax, trên nửa mặt phẳng không chứa C có bờ AB vẽ tia Ay sao cho $\widehat{BAy} = \widehat{CAx}$. Trên tia Ax lấy D sao cho AD = AC, trên tia Ay lấy E sao cho AE = AB. Chứng minh rằng:

a) $\Delta EAC = \Delta BAD$

b) BD = CE

Hướng dẫn giải



a) AE = AB . (1)

$\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC}$

$\widehat{BAD} = \widehat{DAC} + \widehat{BAC}$

mà $\widehat{EAB} = \widehat{DAC}$

nên $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$ (2)

AC = AD (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

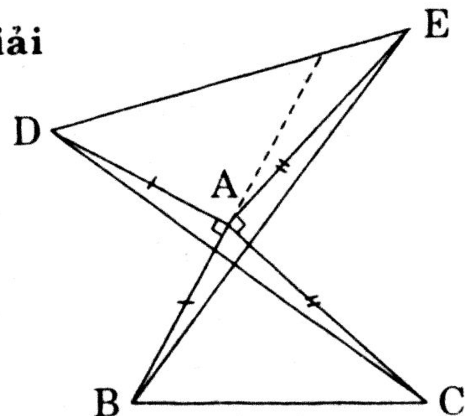
b) Vì ΔEAC = ΔBAD ⇒ BD = CE.

Bài 19 Cho tam giác ABC, có $\widehat{A} < 90^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ax. Trên đó lấy điểm D sao cho AD = AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ay trên đó lấy E sao cho AE = AC.

a) Chứng minh BE = CD.

b) Đường thẳng AB có vuông góc với đường thẳng DE không? Vì sao?

Hướng dẫn giải



a) ΔBAC = ΔDAC (c.g.c) vì:

AB = AD

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$

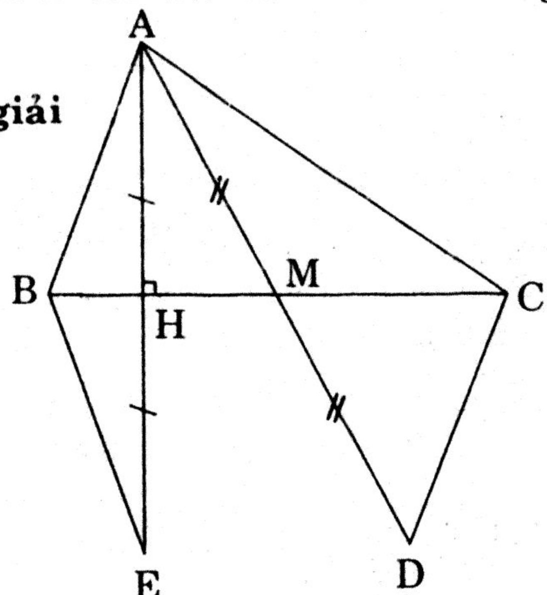
AE = AC

Vậy BE = CD.

b) Giả sử DE ⊥ AB. Mà DA ⊥ AB. Trái với tiên đề Ơ–Clít. Vậy AB không vuông góc với DE.

Bài 20 Cho Δ ABC. Nối A với trung điểm M của BC. Kẻ AH ⊥ BC (H ∈ BC) trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MA = MD, trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HA = HE. Chứng minh BE = CD.

Hướng dẫn giải



• MA = MD

$\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$

MB = MC

nên Δ AMB = Δ DCM

⇒ AB = CD (1)

• AH = EH

$\widehat{AHB} = \widehat{EHB}$

BH cạnh chung

nên $\Delta ABH = \Delta EBH$

$\Rightarrow AB = BE$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow CD = BE$.

Bài 21 Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia AM lấy A' sao cho AM = MA'.

a) So sánh AB với A'C, AC với A'B'.

b) Chứng minh rằng: $\Delta ABC = \Delta A'CB$.

$\Delta ABA' = \Delta A'CA$

Hướng dẫn giải

a) $\Delta AMB = \Delta A'MC$ (c.g.c) vì:

$MA = MA'$, $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, $MB = MC$

Suy ra $AB = A'C$.

Tương tự $\Delta AMC = \Delta A'MC \Rightarrow AC = A'B$.

b) $\Delta AMB = \Delta A'MC$ nên:

$\widehat{A_1} = \widehat{A'_1}$, $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

$\Delta AMC = \Delta A'MB$ nên:

$\widehat{A_2} = \widehat{A'_2}$, $\widehat{C_2} = \widehat{B_2}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A'_1} + \widehat{A'_2} = \widehat{CA'B}$

$\widehat{ABA'} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{A'CA}$

Do đó $\Delta ABC = \Delta A'CB$ ($AB = A'C$, $\widehat{BAC} = \widehat{CA'B}$, $AC = A'B$)

Tương tự $\Delta ABA' = \Delta A'CA$ (c.g.c)

§5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC: GÓC – CẠNH – GÓC (G.C.G)

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

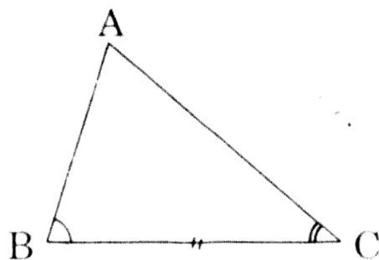
Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

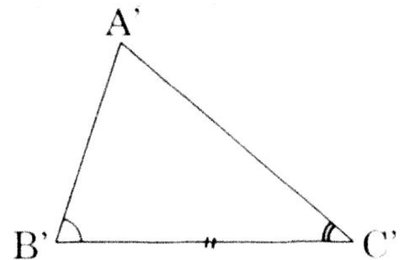
$\widehat{B} = \widehat{B'}$

BC = B'C'

$\widehat{C} = \widehat{C'}$

thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$





2. Hệ quả:

Hệ quả 1: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Hệ quả 2: Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B. Các bài toán

Bài 11 Cho tam giác ABC. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, qua C kẻ đường thẳng song song với AB, chúng cắt nhau ở D. Chứng minh rằng AB = CD.

Giải

ΔABC và ΔDCB có:

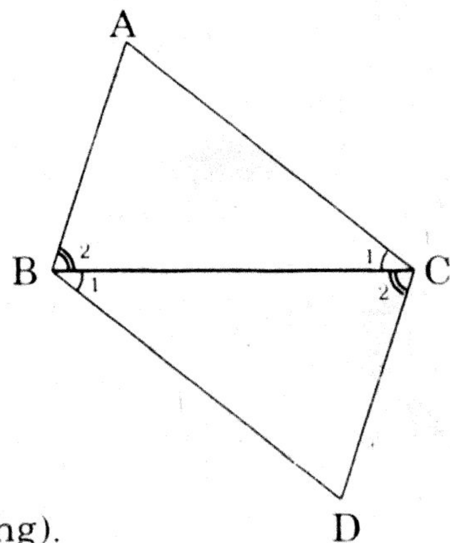
$\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ (hai góc so le trong tạo bởi hai đường song song AB // CD)

BC cạnh chung

$\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc so le trong tạo bởi CD // AB)

nên $\Delta ABC = \Delta DCB$ (g.c.g)

Suy ra AB = CD (hai cạnh tương ứng).



Bài 12 Cho Δ ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Tia phân giác của góc C cắt AB ở E. So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE.

Giải

ΔEBC và ΔDCB có:

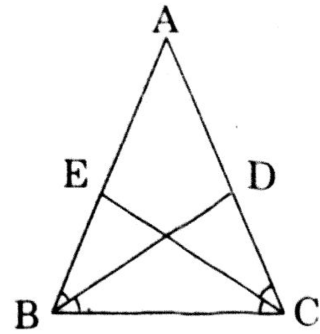
$\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$ (gt $\widehat{B} = \widehat{C}$)

BC cạnh chung

$\widehat{ECB} = \widehat{DBC}$ (gt $= \frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{C}$)

nên $\Delta EBC = \Delta DCB$ (g.c.g)

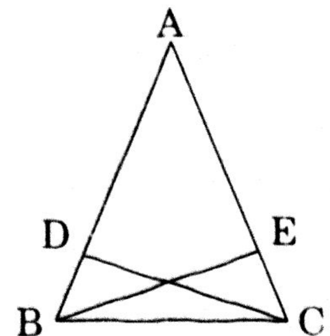
Suy ra CE = BD.



Bài 13 Cho tam giác ABC có AB = AC và $\widehat{B} = \widehat{C}$. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho AD = AE. Gọi I là giao điểm của BE và CD.

Chứng minh rằng $\Delta IBD = \Delta ICE$.

Giải



Xét ΔABE và ΔACD có:

AB = AC (giả thiết)

$\widehat{A}$ chung

AD = AE (giả thiết)

nên: $\Delta ABE = \Delta ACD$ (c.g.c)

Suy ra: BE = CD và $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (1)

Ta có: AB = AC và AD = AE (giả thiết)

nên BD = CE (2)

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (giả thiết)

BC chung

Do đó $\Delta BCD = \Delta CBE$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{CEB}$ (3)

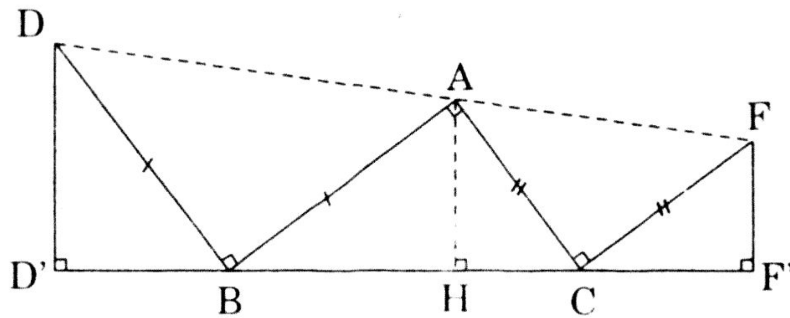
Từ (1), (2) và (3) ta có: $\Delta IBD = \Delta ICE$ (g.c.g)

Bài 14 Cho tam giác ABC vuông tại A. Ở miền ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân ABD, ACF (AB = BD; AC = CF).

a) Chứng minh D, A, F thẳng hàng.

b) Từ D và F hạ các đường vuông góc DD', FF' xuống đường thẳng BC. Chứng minh: DD' + FF' = BC.

Hướng dẫn giải



a) Các ΔDBA, ΔACF vuông cân nên $\widehat{DAB} = 45^0$; $\widehat{CAF} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 180^0 \Rightarrow$ đpcm.

b) Từ A vẽ $AH \perp BC$.

$\Delta DBD' = \Delta BAH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow DD' = BH$ (1)

$\Delta F'CF = \Delta HAC$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow FF' = HC$ (2)

Vậy $DD' + FF' = BC$.

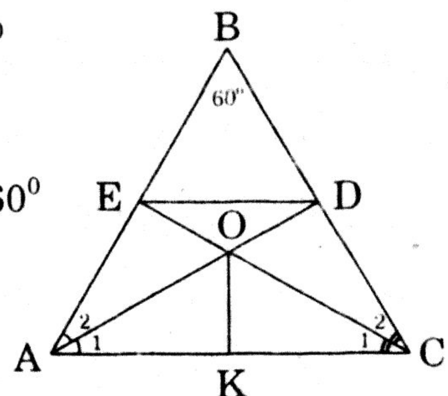
C. Luyện tập

Bài 22 Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0$. Hai tia phân giác AD và CE cắt nhau ở điểm O. Chứng minh:

a) $\Delta AOE = \Delta AOK$

b) $OE = OK = OD$

Hướng dẫn giải



a) $\widehat{B} = 60^0$ nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ và $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ nên:

$$\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}) = \frac{1}{2} . 120^0 = 60^0$$

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^0$ hay $\widehat{DOE} = 120^0$

Lấy điểm $K \in AC$ sao cho $AE = AK$

$\Rightarrow \Delta AOE = \Delta AOK$ (c.g.c)

b) Từ (a) $\Rightarrow OE = OK$ (1)

và $\widehat{AOE} = \widehat{AOK}$

$\widehat{AOE} = 180^0 - \widehat{DOE}$

$= 180^0 - 120^0 = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{COK} = 60^0$

$\Delta COK = \Delta COD$ (g.c.g)

$\Rightarrow OK = OD$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow OE = OK = OD$.

Bài 23 Cho tam giác ABC, AB = AC. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm D và E sao cho AD = AE. Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:

a) BE = CD. b) $\Delta KBD = \Delta KCE$.

Hướng dẫn giải

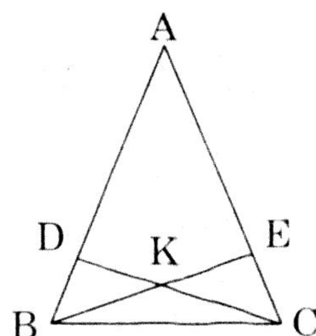
a) $\Delta ABE = \Delta ACD$ (c.g.c) vì:

AB = AC (gt)

$\widehat{A}$ chung

AE = AD (gt)

Suy ra BE = CD



b) $\Delta KBD = \Delta KCE$ (g.c.g) vì:

$\widehat{BDK} = \widehat{CEK}$

BD = CE

$\widehat{DBK} = \widehat{ECK}$

Bài 24 Cho tam giác ABC, có $\widehat{A} = 60^0$, các tia phân giác BM và CN cắt nhau ở I. Tính tổng BN + CM theo BC.

Hướng dẫn giải

$\widehat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CIM} = \widehat{BIN} = 60^0$

Kẻ tia phân giác ID của Δ BIC.

$\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{DIC} = 60^0$

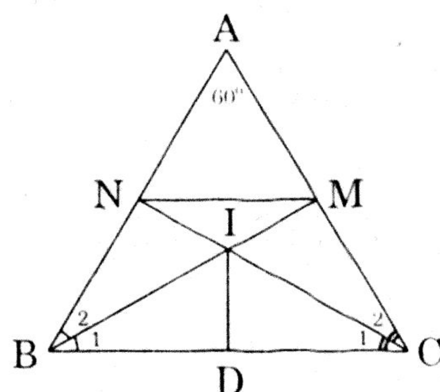
$\Delta BIN = \Delta BID$ vì:

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

BI cạnh chung

$\widehat{BIN} = \widehat{BID} = 60^0$

$\Rightarrow BN = BD$ (1)



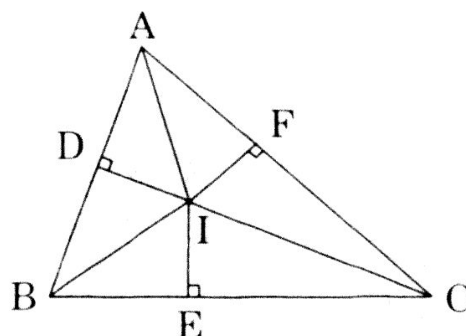
Tương tự $\Delta CIM = \Delta CID$ (g.c.g)

$\Rightarrow CM = CD$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BN + CM = BC$

Bài 25 Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I. Vẽ ID ⊥ AB (D ∈ AB), IE ⊥ BC (E ∈ BC), IF ⊥ AC (F ∈ AC). Chứng minh rằng: ID = IE = IF

Hướng dẫn giải



Ta có:

IB cạnh chung

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (gt)

nên ∆ BID = ∆ BIE

(cạnh huyền góc nhọn)

Suy ra ID = IE

Tương tự ∆CIE = ∆CIF (cạnh huyền góc nhọn)

Suy ra IE = IF

Suy ra ID = IE = IF.

§6. TAM GIÁC CÂN

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Định nghĩa:

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

2. Tính chất:

Định lí 1: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Định lí 2: Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

**Định nghĩa*: tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

3. Tam giác đều:

Định nghĩa: Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

Các hệ quả:

- Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60^0.
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó là tam giác đều.

B. Các bài toán

Bài 15 Cho ∆ABC, tia phân giác góc B và C cắt nhau ở O. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D, cắt AC ở E. Chứng minh DE = DB + EC.

Giải

Ta có BO là tia phân giác của B

nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

mà $\widehat{B_2} = \widehat{O_1}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$

Vậy ΔOBD cân tại D.

Do đó DB = DO (1)

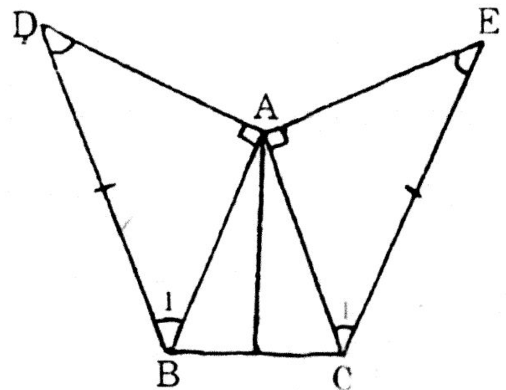
Chứng minh tương tự ΔCEO cân tại E nên:

EC = EO (2)

Cộng (1) và (2) ta được: DE = DB + EC

Bài 16 Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD, ACE. Hãy xác định dạng của Δ ABC. Biết rằng BD = CE.

Giải



Xét ΔABD và ΔACE có:

$\widehat{D} = \widehat{E} = 45^0$

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 45^0$

(Vì ΔABD và ΔACE vuông cân nên:

$\widehat{D} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{E} = \dfrac{90^0}{2}$)

BD = CE (gt)

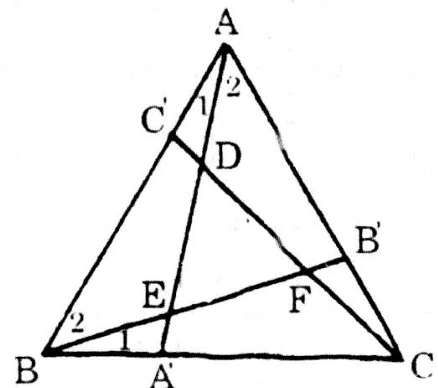
Vậy ΔABD = ΔACE (g.c.g)

Suy ra AB = AC

Vậy ΔABC cân tại A.

Bài 17 Cho tam giác đều ABC, các tia Ax, By, Cz lần lượt nằm trong các góc A, B, C sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CBy} = \widehat{ACz} \neq 30^0$. Chứng tỏ rằng tam giác tạo bởi ba tia đó là tam giác đều.

Giải



Ký hiệu như trên hình.

Xét ΔABA' và ΔBCB' có:

$\widehat{BAA'} = \widehat{CBB'}$ (gt)

AB = BC (cạnh tam giác đều)

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (= 60^0)

nên ΔABA' = ΔBCB' (g.c.g)

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

Do đó $\widehat{A_1} + \widehat{B_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^0$

Suy ra $\widehat{DEF} = \widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 60^0$ (góc ngoài tại E của ΔABE)

Chứng minh tương tự được $\widehat{EDF} = 60^0$

Vậy ΔDEF là tam giác đều.

C. **Luyện tập**

Bài 26 Cho tam giác ABC cân tại A và tam giác A'B'C' cân tại A'. Cho biết cặp cạnh bên bằng nhau AB = A'B'. Hãy bổ sung thêm một điều kiện nữa để ΔABC = ΔA'B'C'.

Hướng dẫn giải

Cần bổ sung thêm một điều kiện:

– Cặp cạnh đáy bằng nhau khi đó Δ ABC = Δ A'B'C' (c.g.c)

– Hoặc cặp góc ở đỉnh bằng nhau, khi đó:

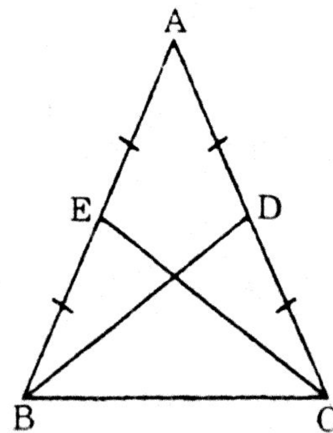
ΔABC = ΔA'B'C' (g.c.g)

– Hoặc cặp góc ở đáy bằng nhau khi đó:

ΔABC = ΔA'B'C' (g.c.g)

Bài 27 Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AC; E là trung điểm của AB. So sánh các độ dài BD và CE.

Hướng dẫn giải



ΔABD = ΔACE vì:

AB = AC (gt)

$\widehat{A}$ chung

AD = AE (gt)

Suy ra BD = CE.

hoặc ΔBDC = ΔCEB (c.g.c)

Suy ra BD = CE

Bài 28 Cho hai đường thẳng x'x và y'y song song và một đường thẳng cắt x'x tại M và y'y tại N. Trên đường thẳng y'y lấy hai điểm EF ở về hai phía của N sao cho:

NE = NF = NM.

Chứng minh:

a) ME, MF là hai tia phân giác của hai góc $\widehat{xMN}$ và $\widehat{x'MN}$.

b) ΔMEF là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

a) MN = NF

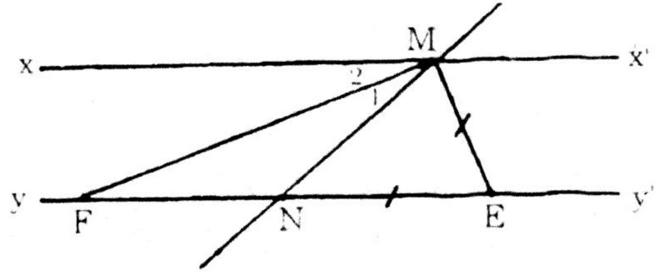
nên ΔMNF cân tại N.

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{F_1}$

mà $\widehat{F_1} = \widehat{M_2}$ (xx' // yy')

Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

nên MF là phân giác của $\widehat{xMN}$



b) ME và MF là hai tia phân giác của hai góc kề bù xMN và x'MN nên ME $\perp$ MF. Vậy Δ MEF vuông tại M.

Bài 29 Cho Δ ABC. Ở phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD, ACE. Hãy xác định dạng của tam giác ABC. Biết rằng DE = BC; $\widehat{DAE} + \widehat{BAC} = 180^0$.

Hướng dẫn giải

ΔADE = ΔABC vì:

AD = AB

AE = AC

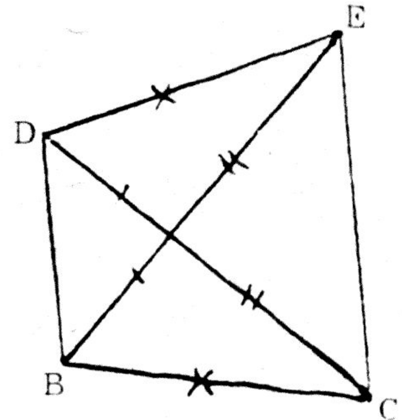
DE = BC

Suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$

Lại có $\widehat{DAE} + \widehat{BAC} = 180^0$

nên $\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = 90^0$

Δ ABC vuông cân tại A.



Bài 30 Cho Δ ABC vuông tại A có góc B bằng 60^0. Vẽ tia Cx $\perp$ BC, trên tia Cx lấy đoạn CE = CA (CE, CA cùng một phía đối với BC). Kéo dài CB lấy F trên đó sao cho:

BF = BA.

Chứng minh:

a) ΔACE đều.

b) Chứng minh ba điểm E, A, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) ΔACE cân tại C, Cx $\perp$ CB nên:

$\widehat{ACE} = 900 - \widehat{C}$

$= 90^0 - 30^0 = 60^0$

ΔACE là tam giác đều.

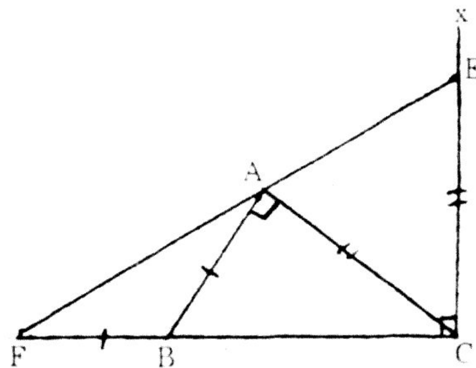
b) $\widehat{EAC} = 60^0$

$\widehat{ABF} = 120^0$

ΔABF cân tại B

Suy ra $\widehat{BAF} = \dfrac{180^0 - \widehat{ABF}}{2}$

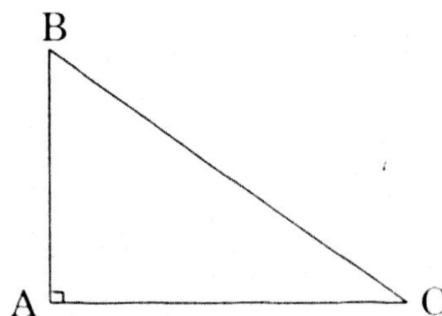
$= \dfrac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$



EAC + CAB + BAF = EAF = 180^0 ⇒ E, A, F thẳng hàng.

§7. ĐỊNH LÍ PY–TA–GO

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ



1. Định lí Py–ta–go:

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

ΔABC vuông tại A ⇒ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2. Định lí Py–ta–go đảo: Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

ΔABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

B. Các bài toán

Bài 18 Tính cạnh huyền của một tam giác vuông cân, biết cạnh góc vuông bằng a.

Giải

Kí hiệu như hình bên.

ΔABC vuông cân tại A.

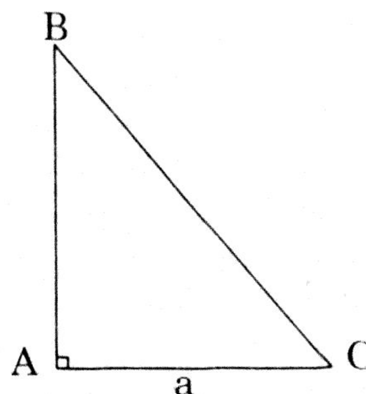
Theo định lý Py–ta–go ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2$

$BC^2 = 2a^2$

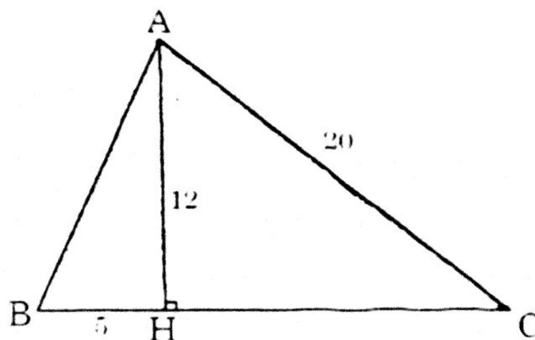
Nên $BC = a.\sqrt{2}$

Vậy cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$



Bài 19 Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$).
Tính chu vi tam giác ABC.
Biết AC = 20 cm, AH = 12 cm, BH = 5 cm.

Giải



Ta có ΔAHB vuông tại H.

Theo định lý Py–ta–go ta có:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25 = 169$

$AB = 13$ (cm)

Tam giác AHC vuông tại H. Theo định lý Py–ta–go ta có:

$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2$

$HC = 16$ (cm)

nên $BC = BH + HC = 5 + 16 = 21$ (cm)

Chu vi tam giác ABC là:

$AB + BC + CA = 13 + 21 + 20 = 54$ (cm)

Bài 20 Độ dài bằng cm của ba cạnh của ba tam giác I, II, III như sau:

I: 5, 12 và 13; II: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ và $5\frac{1}{2}$; III: 7, 24 và 25.

Trong ba tam giác này tam giác nào là tam giác vuông?

a) I và II b) I và III c) II và III d) Cả ba

Giải

Ta chọn câu b.

Ta có: $5^2 + 12^2 = 13^2$ vì $25 + 144 = 169$

$(5\frac{1}{2})^2 < (4\frac{1}{2})^2 + (3\frac{1}{2})^2$ vì:

$(5\frac{1}{2})^2 = (\frac{11}{2})^2 = \frac{121}{4}$

$(4\frac{1}{2})^2 = (\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4}$

$(3\frac{1}{2})^2 = (\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4}$

$\Rightarrow \frac{121}{4} < \frac{81}{4} + \frac{49}{4}$

$7^2 + 24^2 = 25^2$ vì $49 + 576 = 625$

nên các tam giác I, III là tam giác vuông.

Bài 21 Cho tam giác đều ABC, điểm M ở bên trong tam giác, trong đó MA = 1cm, MB = 2cm, MC = $\sqrt{3}$ cm.

a) Tính độ dài cạnh của tam giác ABC.

b) Tính số đo các góc AMB, BMC, CMA.

Giải

a) Vẽ ΔBMD đều (D và M khác phía đối với AB)

Xét ΔBDA và ΔBMC:

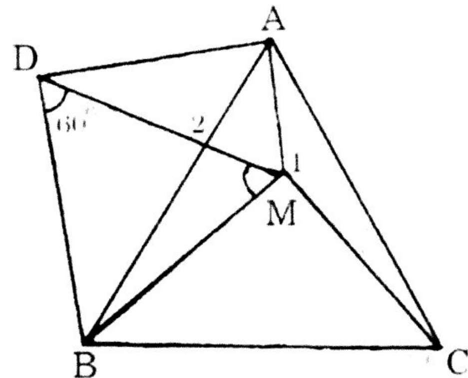
BD = BM

BA = BC

$\widehat{DBA} = \widehat{MBC} = 60^0 - \widehat{ABM}$

Vậy Δ BDA = Δ BMC (c.g.c)

$\Rightarrow$ DA = MC = $\sqrt{3}$



ΔADM có:

$AD^2 + AM^2 = 3 + 1 = 4 = MD^2$

$\Rightarrow \widehat{MAD} = 90^0$ (định lý Py-ta-go đảo)

ΔADM vuông có MA = $\dfrac{1}{2}$ MD nên $\widehat{ADM} = 30^0$

Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ADM} + \widehat{MDB} = 30^0 + 60^0 = 90^0$

Trong ΔADB vuông:

$AB^2 = AD^2 + DB^2 = 3 + 4 = 7$

Vậy AB = $\sqrt{7}$ cm

b) $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} + \widehat{BMD} = 60^0 + 60^0 = 120^0$

ΔBMC có: $MB^2 + MC^2 = 4 + 3 = 7 = BC^2$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = 90^0$ (định lý Py-ta-go đảo)

Suy ra $\widehat{AMC} = 150^0$

C. Luyện tập

Bài 31 Cho tam giác ABC vuông góc tại A. Từ trung điểm D của cạnh AB kẻ DE $\perp$ BC.

Chứng minh hệ thức: $AC^2 = EC^2 - EB^2$

Hướng dẫn giải

Tam giác vuông CAD cho:

$AC^2 = CD^2 - AD^2 = CD^2 - DB^2$

mà $CD^2 = EC^2 + ED^2$

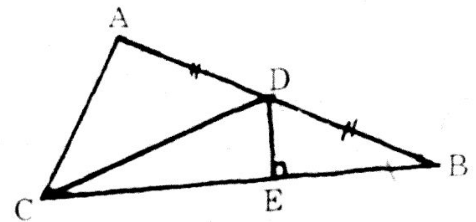
(ΔCED vuông ở E)

$DB^2 = EB^2 + ED^2$

(ΔBED vuông ở E)

nên $AC^2 = EC^2 + ED^2 - (EB^2 + ED^2)$

$= EC^2 - EB^2$



Bài 32 Cho tam giác ABC vuông ở A. Một đường thẳng cắt hai cạnh AB và AC ở D và E.

Chứng minh rằng: $CD^2 - CB^2 = ED^2 - EB^2$

Hướng dẫn giải

Nối BE, CD. Trong tam giác vuông DAC và BAE có:

$CD^2 = AD^2 + AC^2$ (1)

$EB^2 = AB^2 + AE^2$ (2)

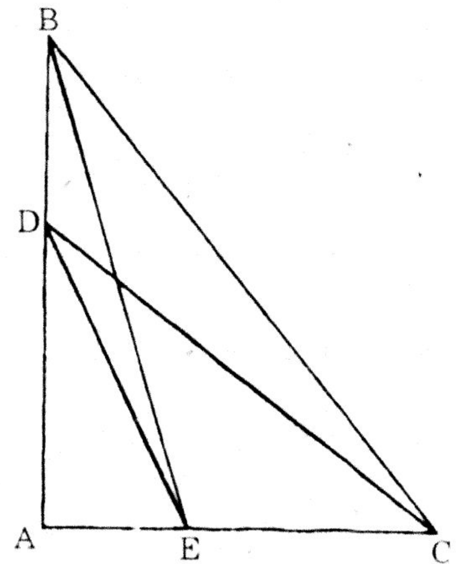
$\Rightarrow CD^2 + EB^2 = AD^2 + AC^2 + AB^2 + AE^2$

mà $AD^2 + AE^2 = ED^2$

$AB^2 + AC^2 = CB^2$

Do đó $CD^2 + EB^2 = ED^2 + CB^2$

$\Rightarrow CD^2 - CB^2 = ED^2 - EB^2$



Bài 33 Cho tam giác nhọn ABC, kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Tính chu vi tam giác ABC. Biết:

AC = 20 cm

AH = 12 cm

BH = 5 cm

Hướng dẫn giải

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

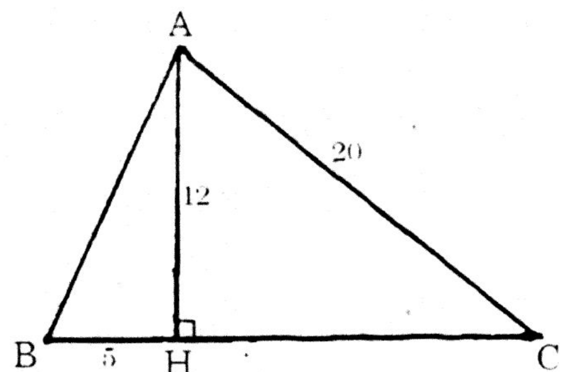
$\Rightarrow AB = 13$ (cm)

$HC^2 = AC^2 - AH^2$

$\Rightarrow HC = 16$ (cm)

$BC = BH + HC = 21$ (cm)

Chu vi tam giác ABC là 54 (cm)

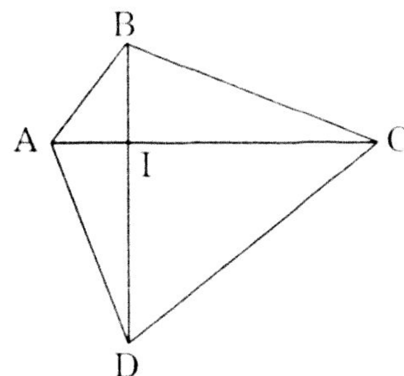


Bài 34 Trong hình vẽ bên có:

$AC \perp BD$.

Chứng minh rằng:

$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$



Hướng dẫn giải

ΔAIB: $AB^2 = IA^2 + IB^2$ (1)

ΔDIC: $DC^2 = ID^2 + IC^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$AB^2 + DC^2 = IA^2 + ID^2 + IB^2 + IC^2$ (3)

ΔDIA: $IA^2 + ID^2 = AD^2$ (4)

ΔBIC: $IB^2 + IC^2 = BC^2$ (5)

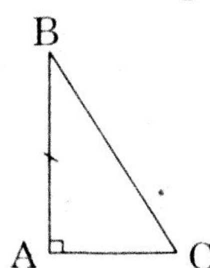
Từ (3), (4) và (5) suy ra: $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$

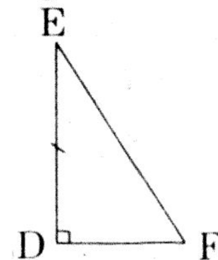
§8. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

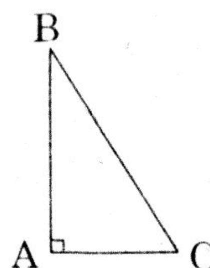
1. Các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông

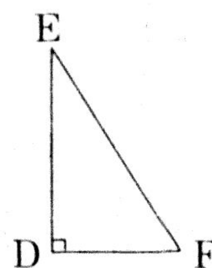
– Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (theo trường hợp c.g.c)



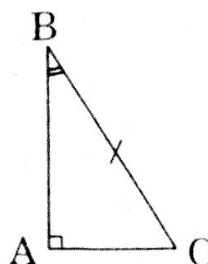


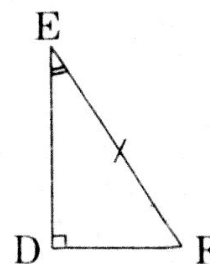
– Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (theo trường hợp g.c.g)





– Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (theo trường hợp g.c.g)





2. Trường hợp bằng nhau về cạnh huyền và cạnh góc vuông.

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Nếu ΔABC và ΔDEF có:

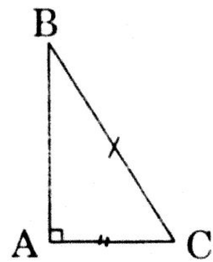
$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^{0}$

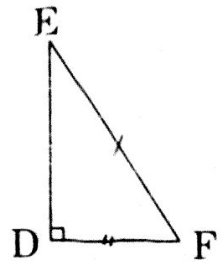
BC = EF

AC = DF

Thì $\Delta ABC = \Delta DEF$

(cạnh huyền – cạnh góc vuông)





B. Các bài toán

Bài 22 Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ AD vuông góc với BC. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc A.

Giải

Xét hai tam giác vuông ADB và ADC có:

AD cạnh chung

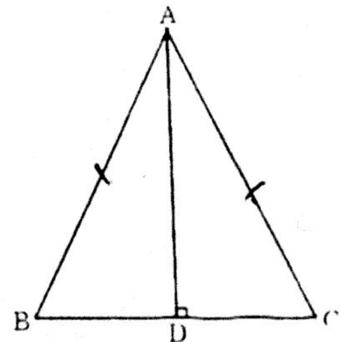
AB = AC (gt)

nên $\Delta ADB = \Delta ADC$

(cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (góc tương ứng)

Vậy AD là tia phân giác của góc A.



Bài 23 Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC. AD là tia phân giác của góc A. Kẻ DE vuông góc với AB, DF vuông góc với AC. Chứng minh:

a) DE = DF; b) $\widehat{B} = \widehat{C}$

Giải

a) Xét hai tam giác vuông ADE và ADF có:

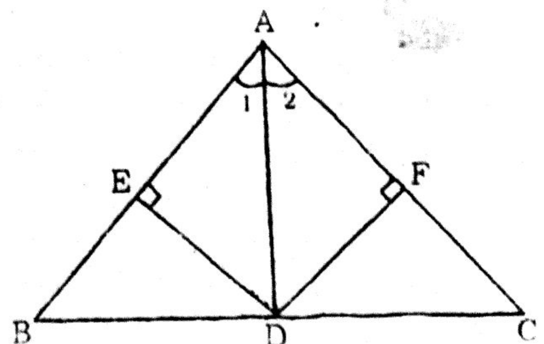
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

AD cạnh chung

nên $\Delta ADE = \Delta ADF$

(cạnh huyền, góc nhọn)

Suy ra DE = DF (cạnh tương ứng)



b) Xét hai tam giác vuông DEB và DFC có:

DB = DC (gt)

DE = DF (theo chứng minh trên)

nên Δ DEB = Δ DFC (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$.

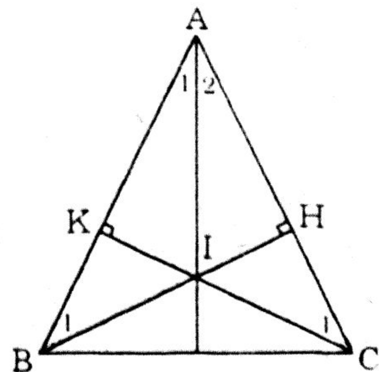
Bài 24 Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ BH ⊥ AC, CK ⊥ AB. Gọi I là giao điểm của BH và CK. Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc A.

Giải

Xét hai tam giác AHB và AKC, ta có:

AB = AC (gt)

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{C}$)



nên ΔAHB = ΔAKC (cạnh huyền, góc nhọn)

Suy ra AH = AK (cạnh tương ứng)

Xét hai tam giác vuông AHI và AKI, ta có:

AI cạnh chung

AH = AK (chứng minh trên)

nên Δ AHI = Δ AKI (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

Suy $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Vậy AI là tia phân giác của góc A.

C. Luyện tập

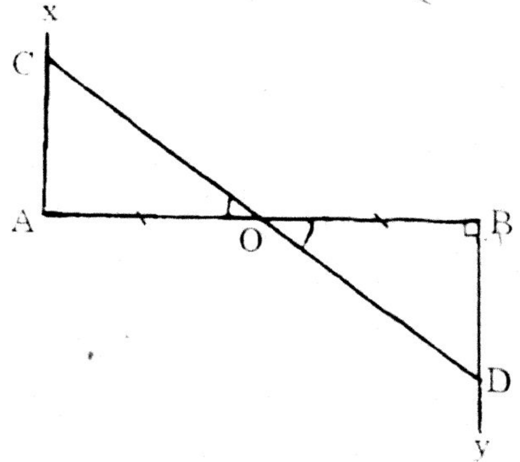
Bài 35 Cho đoạn thẳng AB, trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng chứa đoạn AB vẽ hai tia Ax ⊥ AB, By ⊥ BA. Trên Ax và By lần lượt lấy hai điểm C và D sao cho AC = BD. Gọi O là trung điểm AB.

a) Chứng minh Δ AOC = Δ BOD.

b) Chứng minh O là trung điểm CD.

Hướng dẫn giải

a) Xét hai tam giác vuông AOC và BOD có:



OA = OB

(O là trung điểm AB)

$\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 90^0$ (gt)

AC = BD (gt)

Vậy $\Delta AOC = \Delta BOD$.

b) $\Delta AOC = \Delta BOD$

$\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$, OC = OD

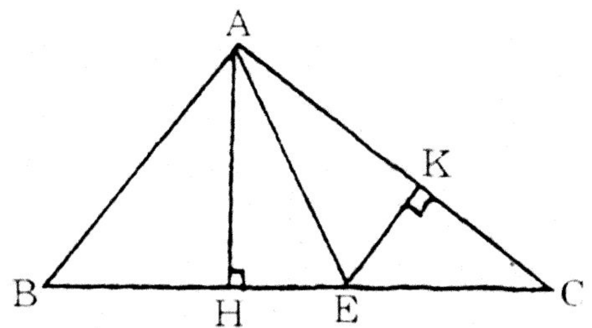
$\Rightarrow$ C, O, D thẳng hàng $\Rightarrow$ O nằm giữa CD.

OC = OD $\Rightarrow$ O là trung điểm của CD.

Bài 36 Cho tam giác ABC vuông góc tại A. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA. Kẻ EK vuông góc với AC ($K \in AC$).

Chứng minh rằng AK = AH.

Hướng dẫn giải



ΔABE cân tại B.

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{EAB}$ (1)

$BA \perp AC$

$EK \perp AC$

$\Rightarrow$ BA // EK

$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{BAE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEK}$

Hai tam giác vuông AEH = AEK vì:

$\widehat{AEH} = \widehat{AEK}$

AE cạnh chung.

Suy ra AH = AK.

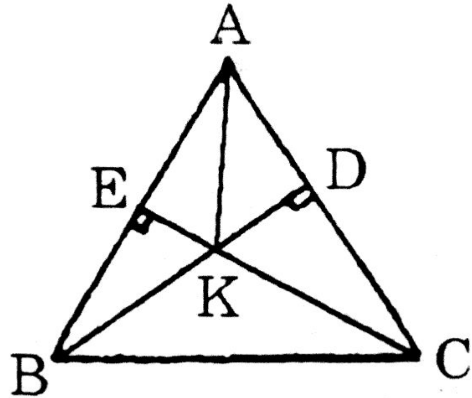
Bài 37 Cho tam giác ABC cân ở $\widehat{A}$, $A < 90^0$. Kẻ BD, CE lần lượt vuông góc với AC, AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE.

Chứng minh rằng:

a) AD = AE

b) AK là tia phân giác của góc A.

Hướng dẫn giải



a) $\Delta ABD = \Delta ACE$

(cạnh huyền, góc nhọn)

b) $\Delta AKD = \Delta AKE$

(cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\widehat{D} = \widehat{E} = 1v$

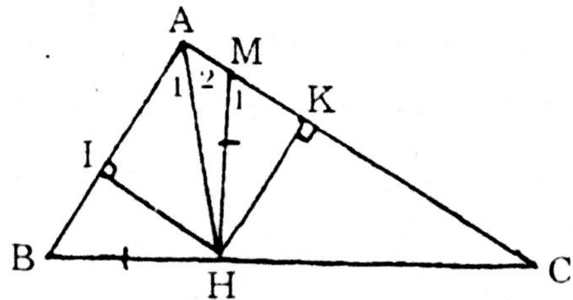
AK cạnh chung

AD = AE

$\Rightarrow$ KAD = KAE $\Rightarrow$ đpcm

Bài 38 Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), M là một điểm thuộc cạnh AC. Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$). Biết MH = HB. Chứng minh rằng AH là tia phân giác của góc A.

Hướng dẫn giải



Kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$

$\Delta HIB = \Delta HKM$

(cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow$ HI = HK

Lại có $\widehat{I} = \widehat{K} = 90^0$

AH cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AIH = \Delta AKH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow$ đpcm.

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC – CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

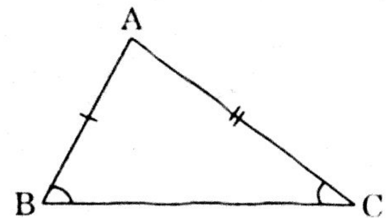
A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Góc đối diện với cạnh lớn hơn:

Định lí 1: Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Δ ABC, AC > AB $\Rightarrow$ B > C

2. Cạnh đối diện với góc lớn hơn:



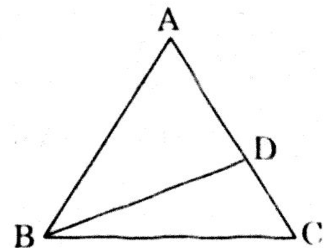
Định lí 2: Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Δ ABC, $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow$ AC > AB

B. Các bài toán

Bài 1 Cho tam giác ABC cân ở A. Lấy D là điểm tùy ý nằm giữa A và C. Chứng minh DC < DB.

Giải



Ta có tia BD nằm giữa hai tia BC, BA

nên $\widehat{CBD} < \widehat{CBA}$

mà $\widehat{CBA} = \widehat{DCB}$ (gt)

Suy ra $\widehat{CBD} < \widehat{BCD}$

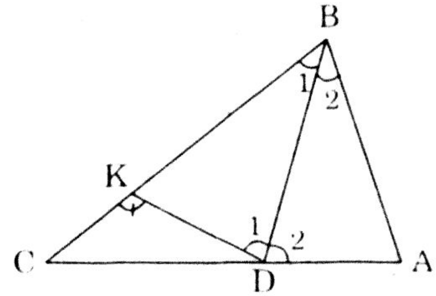
Vậy DC < DB

Bài 2 Cho tam giác ABC với BC > AB. Tia phân giác của góc ABC cắt AC tại D. Chứng minh rằng CD > DA

Giải

Lấy K trên BC sao cho BK = BA. Nối KD

Δ DKB và Δ DAB có:



BD cạnh chung.

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (BD phân giác $\widehat{ABC}$)

BK = BA (cách lấy K)

Vậy Δ DKB = Δ DAB (c.g.c)

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$, DK = DA

Mặt khác CKD là góc ngoài của Δ KBD nên $\widehat{CKD} > \widehat{D_1}$ (1)

$\widehat{D_2}$ là góc ngoài của Δ DBC nên $\widehat{D_2} > \widehat{BCD}$ (2)

Vì $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CKD} > \widehat{BCD}$

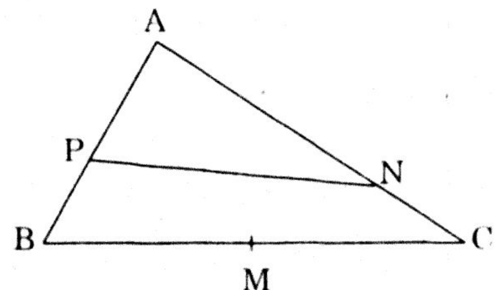
Trong Δ KCD có $\widehat{K} > \widehat{C}$ nên CD > DK.

hay CD > DA.

Bài 3 Cho tam giác ABC (AC > AB), M là trung điểm của BC. Trên AB và AC lấy 2 điểm P và N sao cho BP = CN. Chứng minh $\widehat{APN} > \widehat{ANP}$.

Giải

Ta có:



AC > AB (gt)

Vì BP = CN

nên AC – CN > AB – BP.

hay AN > AP

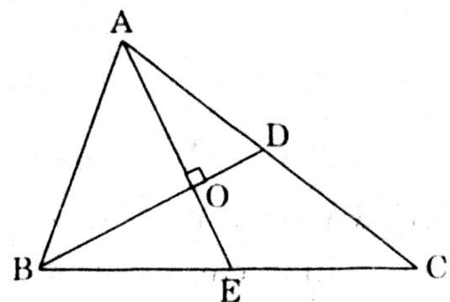
Do đó, trong Δ APN có AN > AP

nên $\widehat{APN} > \widehat{ANP}$

Bài 4 Cho tam giác ABC. Gọi E, D lần lượt là trung điểm của BC, AC và AE vuông góc với BD. Chứng minh rằng BC < 2AC

Giải

Ta có:



Δ BOE có $\widehat{BOE} = 90^0$ (gt)

nên $\widehat{AEC} > 90^0$ (góc ngoài tại E của Δ BOE)

Δ AEC có $\widehat{AEC}$ là góc tù nên:

$\widehat{AEC} > \widehat{EAC}$

Suy ra AC > EC.

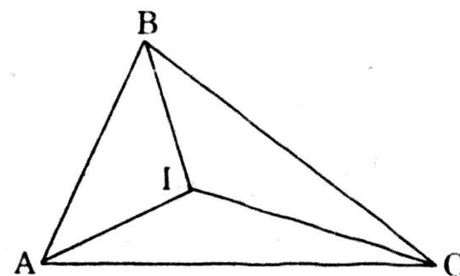
Do đó $AC > \frac{1}{2}$ BC (E là trung điểm của BC)

Vậy BC < 2AC

C. Luyện tập

Bài 1 Cho Δ ABC có ba cạnh thoa mãn hệ thức AC > CB > BC. Gọi I là giao điểm của các tia phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{A}$. Chứng minh rằng IB < IA < IC.

Hướng dẫn giải



Ta có AC > CB > BA

$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{BAC} > \widehat{ACB}$

Δ IBA có $\widehat{ABC} > \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{IBA} > \widehat{IAB}$ (gt)

$\widehat{IBA} > \widehat{IAB} \Rightarrow IA > IB$ (1)

Δ IAC có $\widehat{BAC} > \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{IAC} > \widehat{ICA}$

$\Rightarrow IC > IA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra IB < IA < IC

Bài 2 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu đáy BC lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn cạnh bên thì góc A sẽ lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn 60^0.

Hướng dẫn giải

Vì tam giác ABC cân ở đỉnh A, nên $\widehat{B} = \widehat{C}$

Vì vậy từ đẳng thức $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$,

ta suy ra $\widehat{A} + 2\widehat{C} = 180^0$ (*)

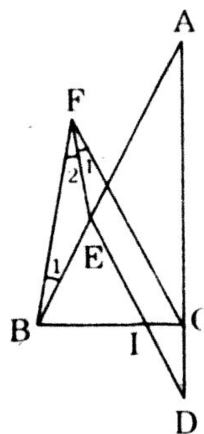
a) Nếu BC > AB thì $\widehat{A} > \widehat{C}$ hay $2\widehat{A} > 2\widehat{C}$, suy ra $3\widehat{A} > \widehat{A} + 2\widehat{C}$. Từ (*) suy ra $3\widehat{A} > 180^0$, suy ra $\widehat{A} > 60^0$

b) Nếu BC = AB thì Δ ABC đều nên $\widehat{A} = 60^0$

c) BC < AB, lý luận tương tự như câu a, ta có $\widehat{A} < 60^0$

Bài 3 Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các tia AB và AC lấy lần lượt các điểm E và D sao cho AE + AD = AB + AC. Từ C kẻ Cx // DE. Từ E kẻ Ey // DC. Gọi F là giao điểm của Cx và Ey. Chứng minh rằng FC > BC.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của BC và ED.

Ta có: $\widehat{C}$ là góc ngoài của Δ ICD

Nên $\widehat{C} > \widehat{D} = \widehat{F}_1$ mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (giả thiết)

Suy ra $\widehat{B} > \widehat{F}_1$. Dễ thấy CD = EF = EB

$\Rightarrow \Delta$ BEF cân $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{F}_2$

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{B}_1 > \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2$

hay $\widehat{FBC} > \widehat{BFC} \Rightarrow FC > BC$

Bài 4 Cho tam giác ABC với AB < AC. Nối A với trung điểm M của BC.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{CAM} < \widehat{BAM}$

b) Từ M kẻ tia Mx sao cho góc BMx nhận tia MA là tia phân giác. Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC và tia Mx. Chứng minh rằng BM > MD

Hướng dẫn giải

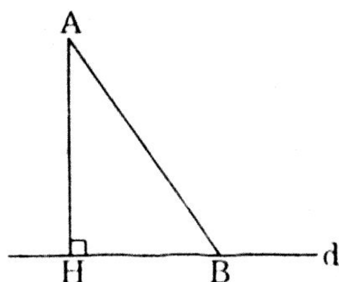
a) Kéo dài AM một đoạn ME sao cho AM = ME.

b) Sử dụng tính chất góc ngoài của tam giác.

§2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên.

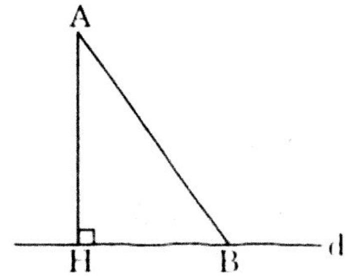


Đoạn thẳng AH gọi là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ A đến đường thẳng d; điểm H gọi là *chân* của đường vuông góc, hay *hình chiếu* của điểm A trên đường thẳng d.

Đoạn thẳng AB gọi là một *đường xiên* kẻ từ A đến đường thẳng d.

Đoạn thẳng HB gọi là *hình chiếu* của đường xiên AB trên đường thẳng d.

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên:



Định lý 1: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

$A \notin d$

AH là đường vuông góc

$\Rightarrow AH < AB$.

AB là đường xiên.

Độ dài đường vuông góc AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

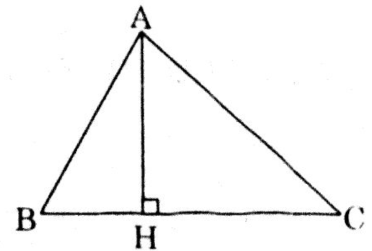
3. Các đường xiên và hình chiếu của chúng

Định lý 2: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

– Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

– Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

– Nếu hai hình xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.



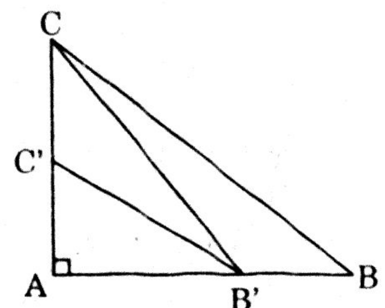
- Nếu HB > HC thì AB > AC
- Nếu AB > AC thì HB > HC
- Nếu HB = HC thì AB = AC

và ngược lại nếu AB = AC thì HB = HC.

B. Các bài toán

Bài 5 Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm B' trên cạnh AB, lấy điểm C' trên cạnh AC. So sánh B'C' và BC.

Giải



Ta có: AC' < AC

nên B'C' < B'C (định lý 2)

Lại có AB' < AB

nên B'C < BC (định lý 2)

Suy ra B'C' < BC

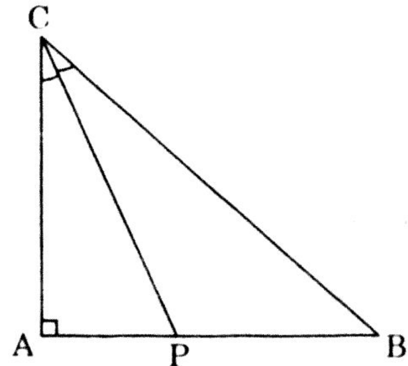
Bài 6 Cho tam giác ABC vuông tại A và tia phân giác CP. Chứng minh:

a) PA < CA

b) CP < CB

Giải

a) Ta có : APC là góc ngoài tại P của Δ BPC nên



$$\widehat{APC} = \widehat{B} + \frac{\widehat{C}}{2} > \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{ACP}$$

Tam giác APC có:

$\widehat{ACP} < \widehat{APC} \Rightarrow PA < CA$.

b) Ta có AP < AB (gt)

$\Rightarrow$ CP < CB (đlí 2)

Bài 7 Cho tam giác ABC, Kẻ AH $\perp$ BC (H $\in$ BC). Chứng minh rằng:

a) $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) Kẻ BK $\perp$ AC tại K, CL $\perp$ AB tại L.

Chứng minh AH + BK + CL < AB + BC + CA.

Giải

a) Ta có:

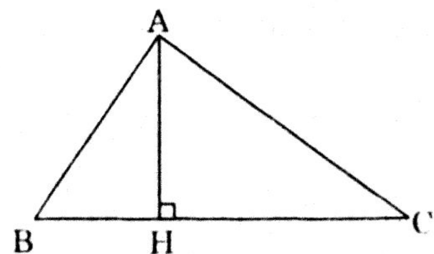
AH là đường vuông góc

AB, AC là các đường xiên, nên:

AH < AB, AH < AC

Do đó 2AH < AB + AC

hay $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$



b) Chứng minh tương tự như câu a, ta được; với BK, CL là các đường cao hạ từ B và C

$AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

$BK < \frac{1}{2}(BA + BC)$

$CL < \frac{1}{2}(CA + CB)$

Từ ba điều trên ta suy ra:

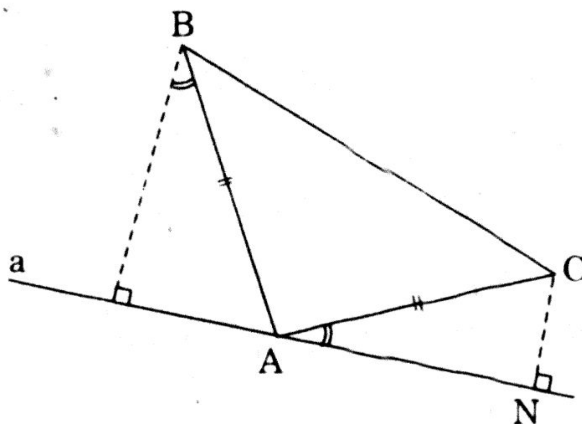
AH + BK + CL < AB + BC + CA

Bài 8 Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Một đường thẳng bất kì đi qua A. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C lên a.

a) Chứng minh CN bằng hình chiếu của AB trên xy.

b) Chứng minh rằng khi a // BC thì các hình chiếu của AB và AC trên a bằng nhau.

Giải



a) Ta có MA là hình chiếu của AB trên a.

Xét hai tam giác AHB và CHA có:

AB = AC (gt)

$\widehat{B} = \widehat{A}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta$ AHB = Δ CHA

$\Rightarrow$ MA = CN

b) a // BC lúc đó các tam giác AMB và CNA là các tam giác vuông cân nên AM = AN nghĩa là các hình chiếu của AB và AC trên a bằng nhau.

C. Luyện tập

Bài 5 Cho tam giác ABC, Kẻ AH vuông góc với BC tại H, BK vuông góc với AC tại K. Biết rằng AH không nhỏ hơn BC, BK không nhỏ hơn AC. Hãy tìm số đo các góc A, B, C của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, ta có:

BC $\le$ AH $\le$ AC $\le$ BK $\le$ BC

$\Rightarrow$ BC = AH = AC = BK = BC

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông cân, đỉnh C.

$\widehat{C} = 90^0$; $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^0$

Bài 6 Hai tam giác: tam giác cân ABC và tam giác AB_1C_1 có chung góc ở đỉnh A có $AC_1 + AB_1 = AB + AC$. Chứng minh $BC < B_1C_1$

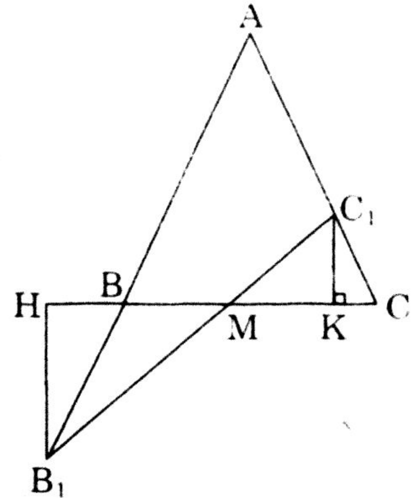
Hướng dẫn giải

Vì $AB_1 + AC_1 = AB + AC = 2AB = 2AC$ nên $BB_1 = CC_1$ và nếu điểm C_1 thuộc đoạn AC thì B_1 trên tia đối của tia BA

Hạ $B_1H \perp BC$ và $C_1K \perp BC$, ta có $\Delta B_1HB = \Delta C_1KC$

nên BH = CK, suy ra BC = HK

Gọi giao điểm của BC với B_1C_1 là M thì $B_1M > MH$ và $C_1M > MK$.



Do đó $HM + MK < B_1M + MC_1$ hay $BC < B_1C_1$

Bài 7 Cho tam giác ABC có AB < AC và $B < 90^0$.

Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên tia AH lấy một điểm M tùy ý. Đường thẳng BM cắt AC ở N.

Chứng minh rằng:

a) MB < MC.

b) NM < NH.

Hướng dẫn giải

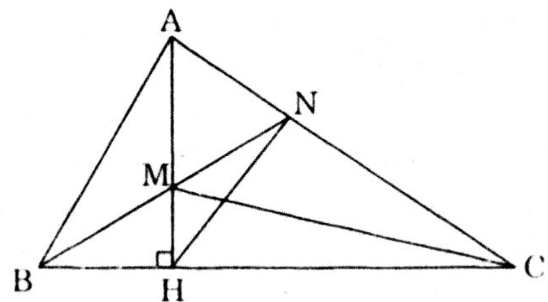
a) Xét hai đường xiên AB và AC. Ta có:

$AB < AC \Rightarrow BH < CH$

Xét hai đường cao MB và MC.

Ta có: BH < CH

$\Rightarrow MB < MC$



b) Xét Δ MNH.

Góc NMH tù vì góc HMB kề bù với nó là góc nhọn của Δ BMH vuông ở H. Nói riêng NMH là góc lớn nhất trong ba góc của Δ MNH (vì một tam giác có không quá một góc tù). Do đó NH là cạnh lớn nhất của Δ MNH, tức là NM < NH (đpcm).

Bài 8 Cho tam giác vuông cân ABC, đỉnh A và đường thẳng xy đi qua A. Gọi E và F là hình chiếu của các điểm B và C trên xy.

a) Chứng minh rằng đoạn CF bằng hình chiếu của đoạn AB trên xy

b) Với vị trí nào của đường thẳng xy thì hình chiếu của AB trên xy lớn hơn hình chiếu AC trên xy?

Hướng dẫn giải

a) Δ CAF = Δ ABE

b) Gọi H là trung điểm của cạnh BC và góc uAH là góc vuông chứa đỉnh B. Nếu đường thẳng xy nằm trong miền phẳng xác định bởi góc vuông uAH và góc đối đỉnh của nó thì hình chiếu AB lớn hơn hình chiếu của AC.

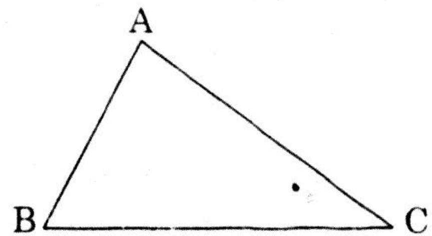
§3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC – BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Bất đẳng thức tam giác:

Định lý: trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

- AB + AC > BC
- AB + BC > AC
- AC + BC > AB



2. Hệ quả của bất đẳng thức tam giác

Hệ quả: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng nhỏ hơn cạnh còn lại.

Nhận xét: Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong tam giác ABC, với cạnh BC, ta có:

AB – AC < BC < AB + AC

B. Các bài toán

Bài 9 Một tam giác có hai cạnh dài 2cm và 10cm. Tìm số đo cạnh thứ ba, biết rằng số đo ấy là một số nguyên tố.

Giải

Giả sử cạnh thứ ba dài x(cm). Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$10 - 2 < x < 10 + 2 \quad \Rightarrow 8 < x < 12$

Vì K là số nguyên tố lớn hơn 8 và nhỏ hơn 12 nên x = 11

Vậy số đo thứ ba là 11 cm.

Bài 10 Hãy tìm độ dài ba cạnh của một tam giác, biết cạnh thứ nhất dài gấp rưỡi cạnh thứ hai, cạnh thứ hai dài gấp rưỡi cạnh thứ ba và nửa chu vi tam giác bằng 9,5cm.

Giải

Gọi độ dài thứ ba là x(cm).

Theo đề bài, độ dài cạnh thứ hai là $\frac{3x}{2}$ (cm), độ dài cạnh thứ nhất là $\frac{3}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{9x}{4}$ (cm).

Bất đẳng thức tam giác thỏa vì $x + \frac{3}{2}x = \frac{5x}{2} > \frac{9x}{4}$

Chu vi của tam giác là: $\frac{3x}{2} + \frac{9x}{4} = \frac{19x}{4}$ (cm)

Theo đề bài ta có: $\frac{19x}{8} = 9,5 \Rightarrow x = 4$

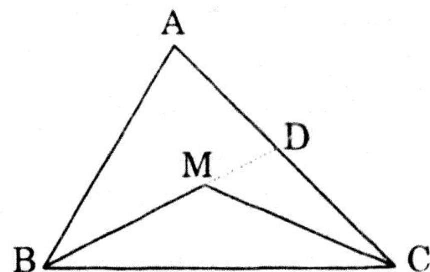
Vậy độ dài ba cạnh tam giác là : 4cm, 6cm, 9cm

Bài 11 Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

MB + MC < AB + AC

Giải

Kéo dài BM cắt AC tại D. Bất đẳng thức tam giác áp dụng đối với Δ CDM và Δ ABD



Cho ta: MC < MD + CD

BD < AB + AD

$\Rightarrow$ MB + MC < MB + MD + CD

= BD + CD < AB + AD + CD

= AB + AC

Vậy MB + MC < AB + AC (đpcm).

Bài 12 Cho tam giác ABC có AC > AB. Nối A với trung điểm M của BC. Trên tia AM lấy điểm E sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AE. Nối C với E.

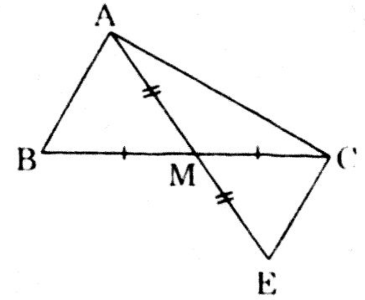
a) So sánh hai đoạn thẳng AB và CE.

b) Chứng minh: $\frac{AC - AB}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2}$

Giải

a) Ta có:

$\widehat{AMB}$ và $\widehat{EMC}$ là 2 góc đối đỉnh nên $\widehat{AMB} = \widehat{EMC}$



MA = ME (M trung điểm AE)

MB = MC (M là trung điểm BC)

nên Δ AMB = Δ EMC (c.g.c)

Suy ra AB = CE

b) Trong Δ ACE có:

AC – CE < AE < AC + CE

Hay AC – AB < AE < AC + CB (vì AB = CE)

$$\frac{AC - AB}{2} < \frac{AE}{2} < \frac{AC + CB}{2}$$

vậy: $\frac{AC - AB}{2} < AM < \frac{AC + CB}{2}$ (vì $AM = \frac{AE}{2}$)

C. Luyện tập

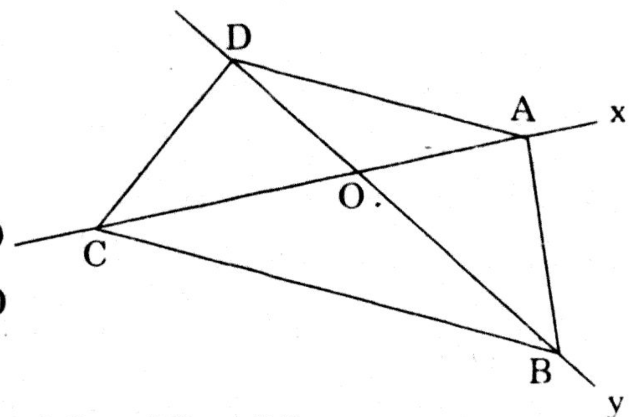
Bài 9 Cho góc xOy. Lấy hai điểm A và B lần lượt trên các cạnh Ox, Oy. Trên tia đối của Ox lấy điểm C, và trên tia đối của Oy lấy điểm D.

Chứng minh:

AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)

Giải

Ta có:



Trong Δ OAB : AB < OA + OB

Δ OBC : BC < OB + OC

Δ OCD : CD < OC + OD

Δ ODA : DA < OD + OD

Suy ra:

AB + BC + CD + DA < 2 (OA + OC + OB + OD)

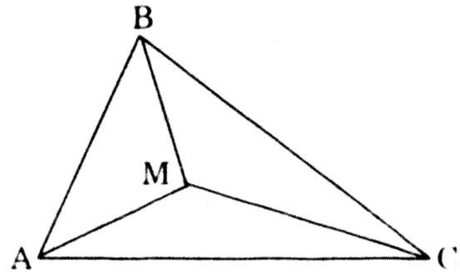
Vậy AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)

Bài 10 Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý nằm trong nó. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < MA + MB + MC < AB + BC + CA$$

Hướng dẫn giải

* Bất đẳng thức tam giác áp dụng trong các tam giác BMC, CMA và AMB cho ta:



BC < MB + MC

CA < MC + MA

AB < MA + MB

⇒ AB + BC + CA < 2 (MA + MB + MC)

hay $\frac{1}{2}$ (AB + BC + CA) < MA + MB + MC (1)

* Mặt khác, theo bài 1 ta cũng có:

MB + MC < AB + CA

MA + MB < CA + BC

⇒ 2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + CA)

Hay MA + MB + MC < AB + BC + CA (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra (đpcm).

Bài 11 Cho tam giác ABC, Mlà điểm nằm trên tia phân giác ngoài của góc C. Chứng minh rằng:

MA + MB > CA + CB

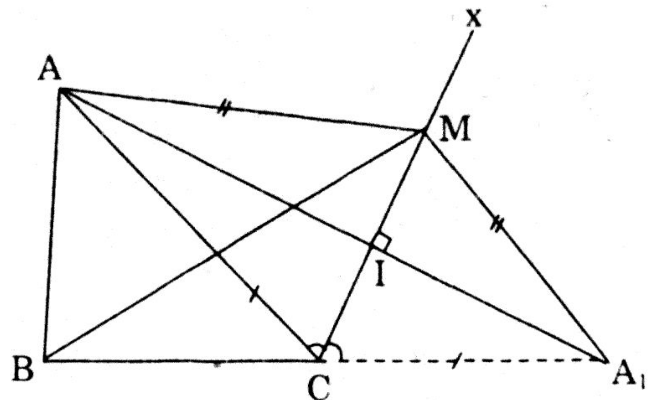
Hướng dẫn giải

Gọi Cx là tia phân giác ngoài của C.

Từ A hạ AI ⊥ Cx.

Trên tia AI kéo dài lấy A_1 sao cho $A_1I = AI$

Khi đó ba điểm A_1, B, C thẳng hàng và MA + MA_1



nên: $MA + MB = MA_1 + MB > A_1B$

$= A_1C + CB = CA + CB$ Vậy MA + MB > CA + CB

Bài 12 Hãy tìm độ dài ba cạnh của một tam giác biết cạnh thứ nhất dài gấp rưỡi cạnh thứ hai, cạnh thứ hai dài gấp rưỡi cạnh thứ ba và nửa chu vi tam giác bằng 9,5cm.

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài cạnh thứ ba là x. Theo đề bài độ dài cạnh thứ hai là $\frac{3x}{2}$ (cm), độ dài cạnh thứ nhất là $\frac{3}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{9x}{4}$ (cm). Bất đẳng thức được thỏa thỏa vì $x + \frac{3}{2}x = \frac{5x}{2} > \frac{9x}{4}$

Chu vi của tam giác là: $x + \frac{3x}{2} + \frac{9x}{4} = \frac{19x}{4}$ (cm)

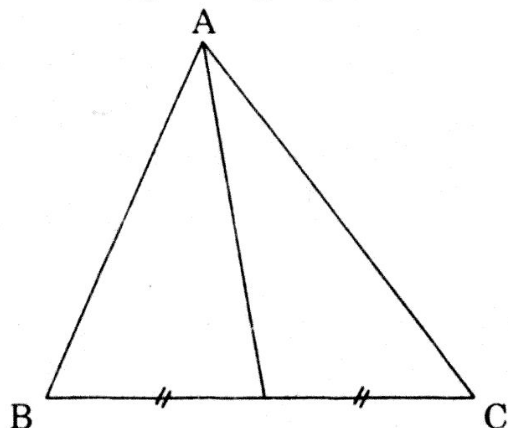
Theo đề bài ta có: $\frac{19x}{8}x = 9,5 \Rightarrow x = 4$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là 4cm, 6cm, 9cm.

§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

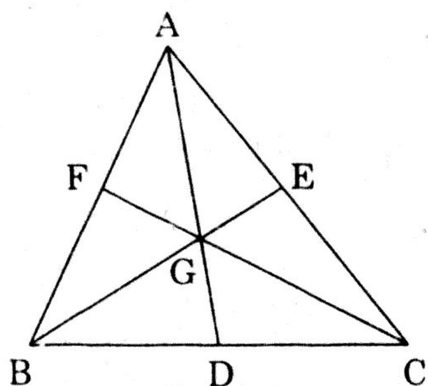
A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đường trung tuyến của tam giác:



- Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC. Đường thẳng AM cũng là đường trung tuyến của tam giác ABC.
- Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.



Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

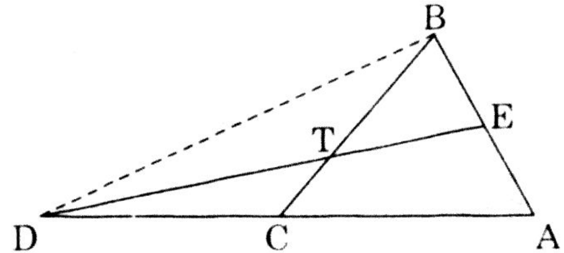
Δ ABC có các trung tuyến AD, BE, CF

$\Rightarrow \frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$

B. Các bài toán

Bài 13 Cho Δ ABC. Trên cạnh BC lấy điểm T sao cho TB = $\frac{2}{3}$ BC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = CA. Đường thẳng DT cắt cạnh AB tại E. Chứng minh EA = EB.

Giải



Trong Δ ABD có BC là trung tuyến vì CA = CD. Và TB = $\frac{2}{3}$ BC do đó T là trọng tâm của Δ ABD.

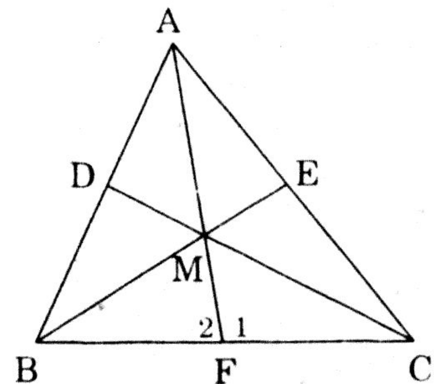
Suy ra DT là đường thẳng chứa trung tuyến xuất phát từ D nên phải qua trung điểm E của AB.

Vậy EA = EB.

Bài 14 Cho Δ ABC, AC > AB. Gọi BE và CD là các trung tuyến.

Chứng minh CD > BE.

Giải



Gọi F là trung điểm của BC thì ba đường trung tuyến AF, BE, CD cắt nhau ở M. Vì AC > AB nên $\widehat{F_1} > \widehat{F_2}$ (do Δ AFB và Δ AFC có AF cạnh chung, FB = FC và AC > AB).

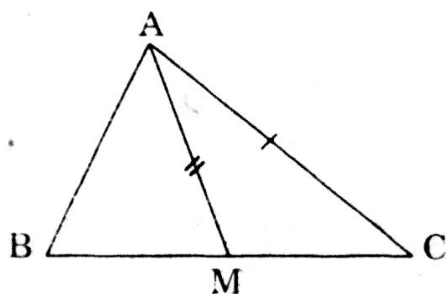
Từ $\widehat{F_1} > \widehat{F_2}$ thì hai tam giác MFB và MFC có MF cạnh chung, FB = FC ta suy ra MC > MB. Hay $\frac{2}{3}$ CD > $\frac{2}{3}$ BE.

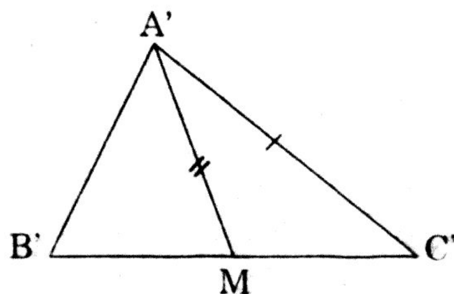
Vậy CD > BE

Bài 15 Chứng minh nếu hai tam giác ABC và A'B'C' có AC = A'C', BC = B'C' và các đường trung tuyến AM = A'M' thì chúng bằng nhau.

Giải

Ta có CM = $\frac{1}{2}$ BC (AM là trung tuyến Δ ABC)





C'M' = $\frac{1}{2}$ B'C' (A'M' là trung tuyến Δ A'B'C')

Mà BC = B'C' (gt)

suy ra: CM = C'M'

Δ AMC và Δ A'M'C' có

AC = A'C'(gt)

AM = A'M' (gt)

CM = C'M' (theo chứng minh trên)

nên Δ AMC = Δ A'M'C' (c.c.c)

suy ra C = C'

Δ ABC và Δ A'B'C' có:

AC = A'C' (gt)

$\widehat{C} = \widehat{C'}$ (theo chứng minh trên)

BC = B'C' (gt)

nên Δ ABC = Δ A'B'C' (c.g.c)

C. Luyện tập

Bài 13 Cho Δ ABC, AC > AB. Gọi BE và CD là các trung tuyến. Chứng minh CD > BE.

Hướng dẫn giải

Gọi F là trung điểm của BC, thì ba đường trung tuyến AF, BE, CD cắt nhau ở M. Vì AC > AB nên $F_1 > F_2$

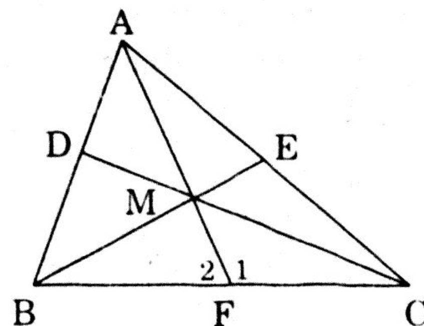
Δ MFB và Δ MFC có MF cạnh chung,

FB = FC.

Ta suy ra MC > MB

hay $\frac{2}{3}$ CD > $\frac{2}{3}$ BE

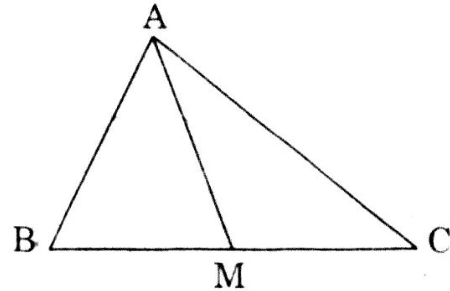
Vậy CD > BE



Bài 14 Cho tam giác ABC, BC = a, CA = b, AB = c. Vẽ trung tuyến AM. Đặt AM = ma.

Chứng minh rằng $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$.

Hướng dẫn giải



Với Δ AMB ta có:

AM + MB > AB (1)

Với Δ AMC ta có:

AM + MC > AC (2)

$\Rightarrow 2AM + (BM + MC) > AB + AC$

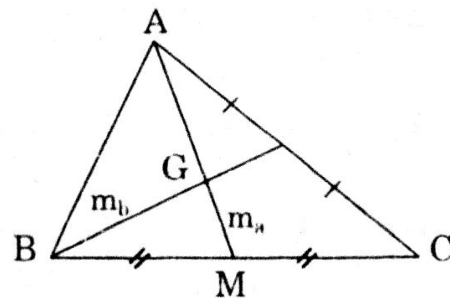
$\Rightarrow m_a > \frac{b+c-a}{2}$ (1)

Theo bài 11 §3 ta có $m_a < \frac{b+c}{2}$ (2)

(1), (2) suy ra đpcm.

Bài 15 Chứng minh rằng trong một tam giác tổng độ dài các đường trung tuyến lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi.

Hướng dẫn giải



Theo bài 11 §3 ta có $m_a < \frac{b+c}{2}$

$\Rightarrow m_a + m_b + m_c < a + b + c$

Gọi G là trọng tâm của Δ ABC.

$\Rightarrow GA + GB > AB$

$\Rightarrow GA + GB + BC > \frac{AB + AC + CB}{2}$

$\Rightarrow \frac{2(m_a + m_b + m_c)}{3} > \frac{(a+b+c)}{2}$

$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c) > \frac{3(a+b+c)}{4}$

$\Rightarrow m_a + m_b + m_c > m_a + m_b + m_c > \frac{3(a+b+c)}{4}$

Vậy ta có: $a + b + c > m_a + m_b + m_c > \frac{3(a+b+c)}{4}$.

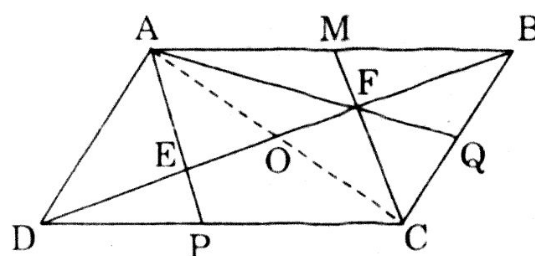
Bài 16 Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn điều kiện AB // CD, AD // BC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của DC và BC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của BD với AP, AQ.

Gọi M là trung tuyến của AB.

a) Chứng minh C, F, M thẳng hàng

b) Chứng minh DE = EF = FB

Hướng dẫn giải



a) Δ AOD = Δ COB

$\Rightarrow$ OA = OC và OD = OB

Vậy F là trọng tâm của Δ ABC

$\Rightarrow$ C, F, M thẳng hàng.

b) $BF = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{1}{3}BD$

Chứng minh tương tự $DE = \dfrac{1}{3}BD$

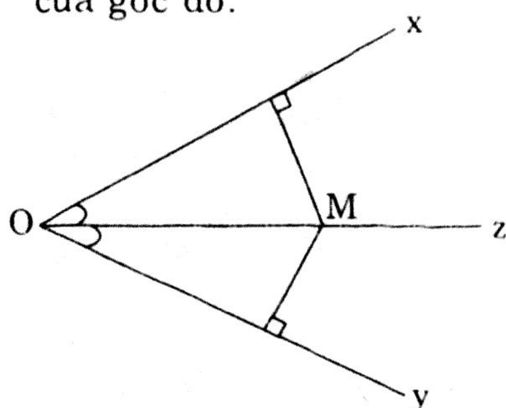
Từ đó suy ra $DE = EF = FB\ (= \dfrac{1}{3}BD)$

§5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Định lý 1: (định lý thuận)

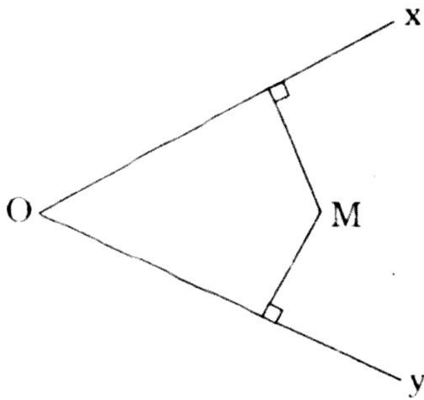
Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



GT	• M nằm trên tia phân giác của góc Oxy • MA ⊥ Ox, MB ⊥ Oy
KL	MA = MB

2. Định lý 2: (định lý đảo)

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



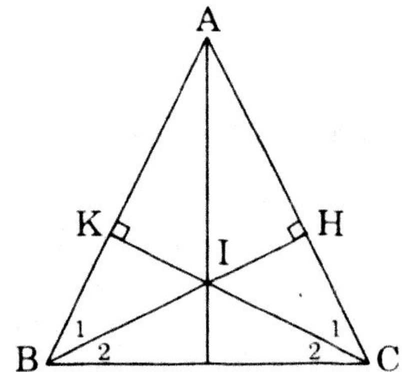
GT	• M nằm trong góc Oxy • MA ⊥ Ox, MB ⊥ Oy • MA = MB
KL	M nằm trên tia phân giác của góc xOy

Nhận xét: Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

B. Các bài toán

Bài 16 Cho tam giác cân ABC (AB = AC) các đường cao BH và CK cắt nhau tại I. Chứng minh AI là phân giác của góc BAC.

Giải



Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (1) (cùng phụ A)

Suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{B_2}$

Do đó Δ IBC cân tại I

nên IB = IC (2)

Từ (1) và (2) ta có

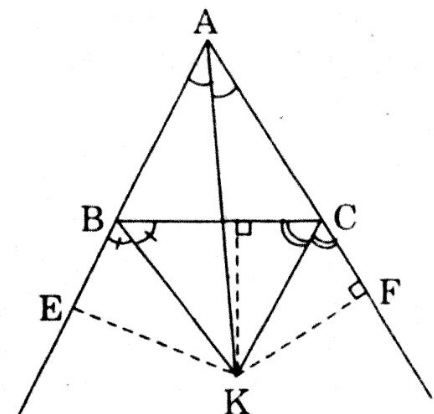
Δ IHC = Δ IKB (cạnh huyền, góc nhọn)

Nên IH = IK

Vậy AI là phân giác của góc BAC.

Bài 17 Chứng minh rằng: trong một tam giác ba phân giác của hai góc ngoài và một góc trong không kề với chúng gặp nhau tại một điểm.

Giải



Gọi K là giao điểm hai đường phân giác góc ngoài tại B và C. Từ K hạ KD ⊥ BC, KE ⊥ AB, KF ⊥ AC. Theo tính chất về đường phân giác ta có:

KD = KE và KD = KF

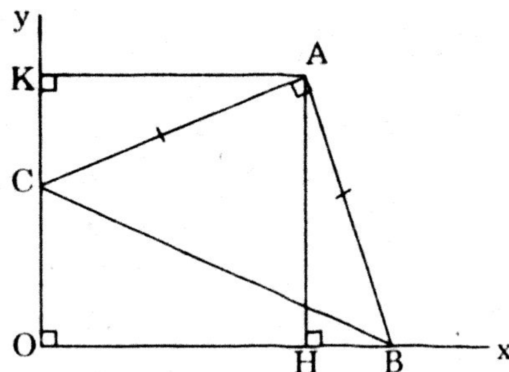
Suy ra KE = KF. Điều này chứng tỏ K

nằm trên phân giác của góc BAC. Vậy hai phân giác ngoài tại đỉnh B và C và phân giác trong tại đỉnh A của tam giác ABC cắt nhau tại một điểm.

C. Luyện tập

Bài 17 Cho góc vuông xOy và tam giác vuông cân ABC có $\widehat{A} = 90^0$, B thuộc Ox, C thuộc Oy, A và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BC. Chứng minh rằng OA là tia phân giác của góc xOy.

Hướng dẫn giải



Vẽ AH ⊥ Ox, AK ⊥ Oy

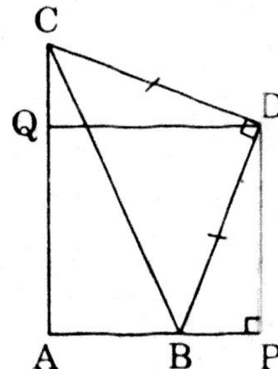
Δ KAC = Δ HAB (cạnh huyền, góc vuông)

suy ra AK = AH

⇒ đpcm.

Bài 18 Cho Δ ABC vuông tại A. Dựng ở nửa mặt phẳng bờ BC, không chứa A tam giác vuông cân CDB tại D. Chứng minh AD là phân giác của góc BAC.

Hướng dẫn giải



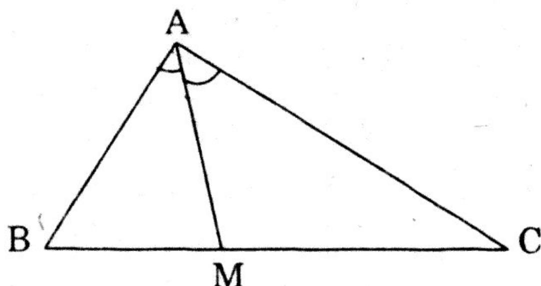
Vẽ DP //AB, DQ ⊥ AC

Suy ra DP = DQ ⇒ đpcm

§6. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đường phân giác của tam giác:



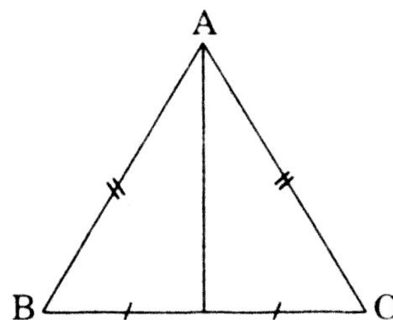
Trong tam giác ABC tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M.

- Đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác của tam giác ABC.

- Đường thẳng AM cũng gọi là đường phân giác của tam giác ABC.
- Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

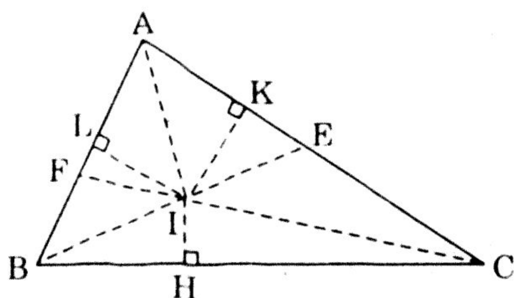
Tính chất:

Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.



2. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

Định lý: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.



GT	• Δ ABC. • Hai phân giác BE, EF cắt nhau tại I
KL	• AI là tia phân giác của góc A • IH = IK = IL

B. Các bài toán

Bài 18 Tam giác ABC có trung tuyến AM đồng thời là phân giác. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác vuông cân.

Giải

Kéo dài AM một đoạn MD = AM

Δ AMB và Δ DMC có:

AM = DM (cách vẽ)

$\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh)

MB = MC (gt)

Nên Δ AMB = Δ DMC (c.g.c)

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{D}$; AB = CD (1)

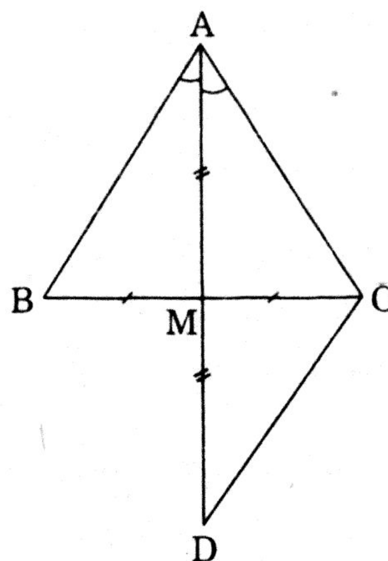
Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt), $\widehat{A_1} = \widehat{D}$

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D}$. Do đó

Δ ACD cân suy ra AC = CD (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB = AC

Vậy Δ ABC là tam giác cân.

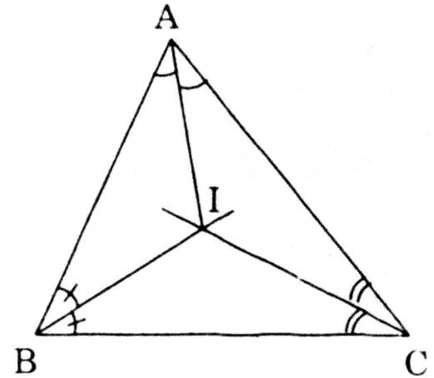


Bài 19 Hai đường phân giác của góc B và góc C trong tam giác ABC cắt nhau ở I. Chứng minh rằng: $\widehat{BIC} = 90 + \frac{\widehat{A}}{2}$

Giải

I là giao điểm của hai phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$

$\Rightarrow$ phân giác góc A là AI.



Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^0$

$\Rightarrow \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{A}}{2}$

Trong tam giác BIC có:

$\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right)$

$180^0 - (90^0 - \frac{\widehat{A}}{2}) = 90^0 + \frac{\widehat{A}}{2}$

Vậy $\widehat{BIC} = 90^0 + \frac{\widehat{A}}{2}$

Bài 20 Cho tam giác ABC, hai đường phân giác trong của hai góc B và C cắt nhau ở điểm I và hai đường phân giác ngoài của hai góc ấy cắt nhau ở điểm D. Chứng minh rằng ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Giải

Hai phân giác trong của hai góc B và C cắt nhau tại I nên phải thuộc phân giác góc A.

Từ D hạ DH, DK, DJ vuông góc lần lượt với AB, BC, AC

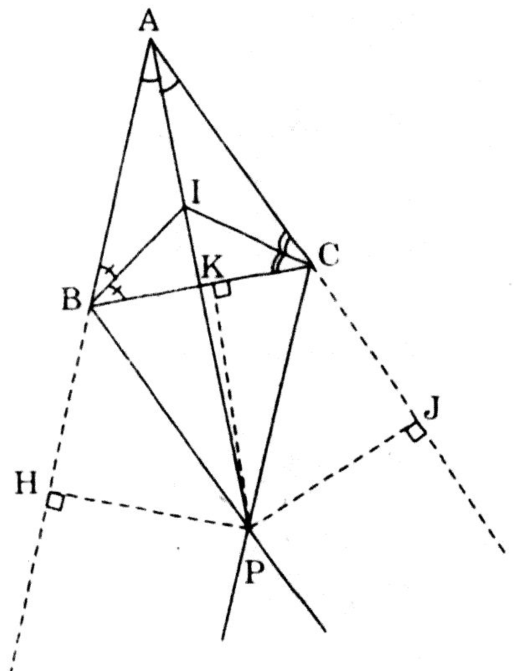
Ta có: DH = DK (do D thuộc phân giác ngoài của góc B).

Tương tự: DK = DJ

$\Rightarrow$ DH = DJ

Điều này chứng tỏ D thuộc phân giác góc A hay D thuộc AD.

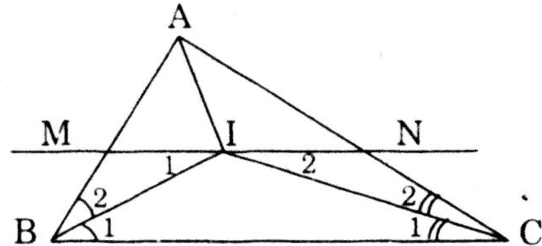
Vậy A, I, D thẳng hàng.



Bài 21 Cho tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của hai tia phân giác hai góc A và B. Qua I vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AB tại M, cắt AC tại N. Chứng minh rằng:

MN = BM + CN

Giải



Ba phân giác của tam giác cùng đi qua một điểm nên CI là tia phân giác của góc C.

Vẽ MN // BC nên $\widehat{C_1} = \widehat{I_1}$ (hai góc so le trong)

mà $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ nên $\widehat{C_2} = \widehat{I_2}$

Do đó Δ NIC cân và NC = IN (1)

Tương tự ta có: MB = MI (2)

Từ (1) và (2) ta có:

MI + IN = BM + CN

Hay MN = BM + CN

C. Luyện tập

Bài 19 Cho tam giác ABC, biết $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 3 : 4 : 5$. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác. Tính các góc AIB, BIC, CIA.

Hướng dẫn giải

$\widehat{AIB} = 127^0 30'$

$\widehat{BIC} = 112^0 30'$

$\widehat{CIA} = 120^0$

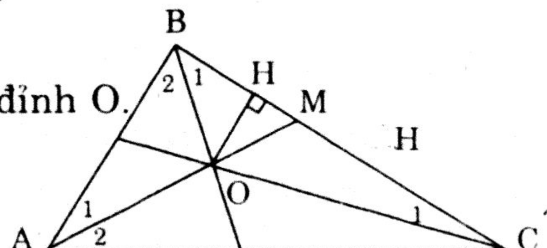
Bài 20 Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại O. Vẽ OH ⊥ BC (H ∈ BC). Tia AO cắt BC tại M. Chứng minh rằng $\widehat{BOM} = \widehat{COH}$.

Hướng dẫn giải

AM là phân giác của góc A.

Δ AOB có góc BOM là góc ngoài ở đỉnh O.

$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{C}}{2}$



Δ HOC có $\widehat{COH} = 90^0 - \dfrac{\widehat{C}}{2}$

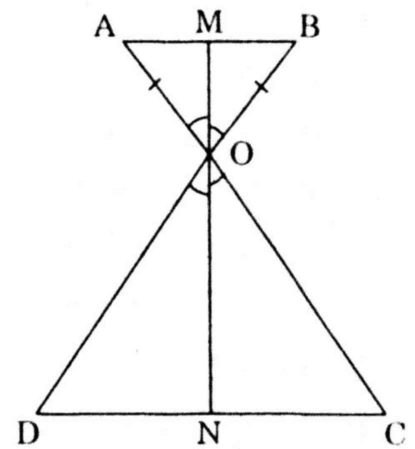
$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{COH}$

Bài 21 Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O. Trên Ox, Ox' lần lượt lấy các điểm A, C; trên Oy, Oy' lấy lần lượt các điểm B, D sao cho OA = OB, OC = OD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Với Δ OAB, OM vừa là trung tuyến vừa là phân giác góc AOB nên:



$\widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (1)

Tương tự:

với Δ ODC, có $\widehat{CON} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (2)

mà $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{CON}$

$\Rightarrow \widehat{MOC} + \widehat{CON} = 180^0 \Rightarrow$ đpcm

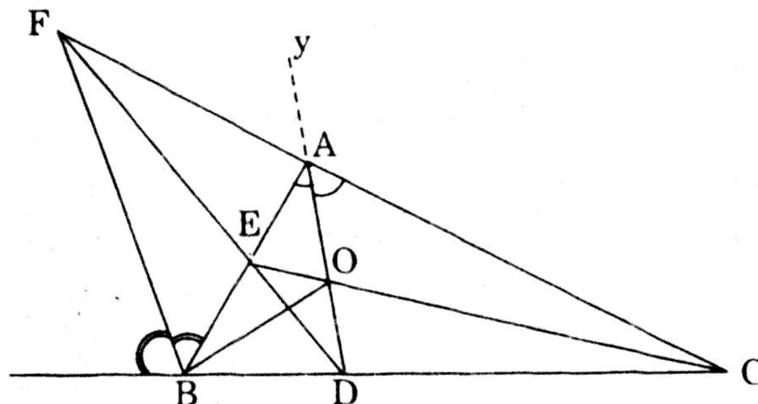
Bài 22 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$. Các phân giác AD và CE gặp nhau tại O. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh:

a) BO $\perp$ BF

b) $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng

Hướng dẫn giải



a) BO ⊥ BF (Hai tia phân giác của góc kề bù).

b) $\widehat{BAF} = \widehat{FAy} = 60^0$

Δ ABD có hai tia phân giác ngoài tại đỉnh A và B gặp nhau tại F, suy ra DF là tia phân giác của góc ADB.

Vậy $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$.

c) Δ ACD có phân giác của góc C và phân giác ngoài tại đỉnh A gặp nhau tại E, suy ra DE là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh D.

DE và DF đều là tia phân giác của góc ADB nên ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 23 Ba đường phân giác trong của ba góc A, B, C của tam giác ABC gặp nhau ở điểm I. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi AIB = $\widehat{BIC} = \widehat{CIA} = \widehat{120^0}$.

Chứng minh rằng $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$

Hướng dẫn giải

Thuận. Giả sử Δ ABC đều, rồi chứng minh:

$\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CIA} = 120^0$

Đảo. Giả sử ta có $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CIA} = 120^0$

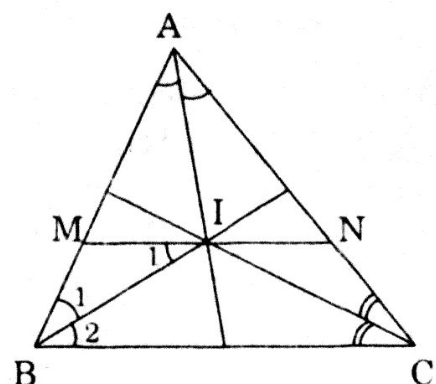
Chứng minh $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$

Bài 24 Qua giao điểm I của các phân giác trong dựng từ B và C của tam giác ABC, người ta kẻ đường thẳng song song với BC. Đường thẳng này cắt AB và BC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng MN = BM + NC

b) Kết quả ở câu a sẽ thay đổi như thế nào nếu qua giao điểm J của hai phân giác ngoài của góc B và C kẻ đường song song với BC.

Hướng dẫn giải



a) Ta suy ra AI là phân giác của góc A

Từ MN // BC ⇒ $B_2 = I_1$

mà $B_1 = B_2 \Rightarrow B_1 = I_1$

⇒ Δ BMI cân

⇒ MB = MI (1)

Tương tự Δ CNI cân

⇒ NC = NI (2)

Từ (1) và (2) đpcm.

b) Bạn đọc tự làm.

§7. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

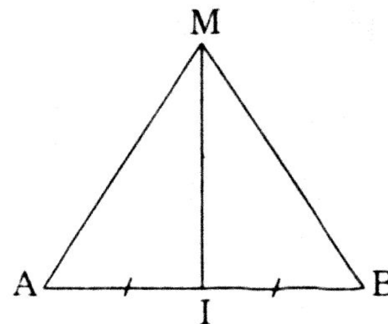
1. Định lý về tính chất của các điểm thuộc đường trung trực

- *Định lí 1: (Thuận)*

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của doạn thẳng đó.

- *Định lý 2: (đảo)*

Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

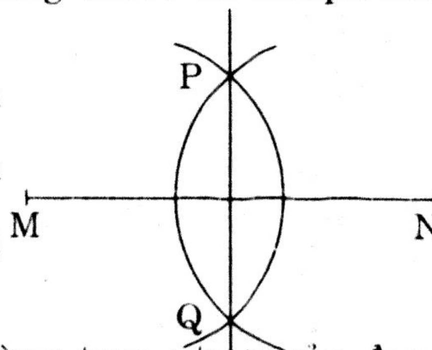


Nhận xét: tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

2. Ứng dụng:

Vẽ đường trung trực của đoạn thẳng MN bằng thước và compa như sau:

- Lấy M làm tâm vẽ cung tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}$ MN. Lấy MN làm tâm vẽ cung tròn có cùng bán kính đó. Hai cùng tròn này có hai điểm chung là P, Q
- Dùng thước vẽ đường thẳng PQ. Đó là đường trung trực của đoạn thẳng MN.



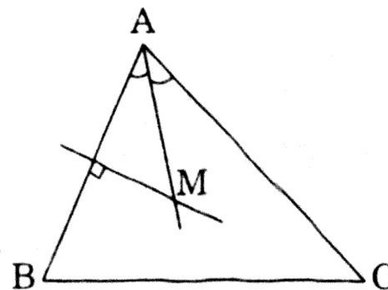
B. Các bài toán

Bài 22 Cho tam giác ABC. Hãy tìm một điểm cách đều hai cạnh AB, AC và cách đều hai đỉnh A, B.

Giải

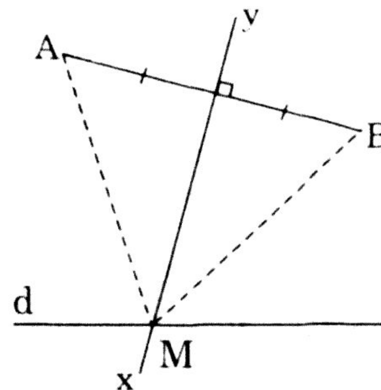
Mọi điểm trên đường phân giác của góc A thì cách đều hai cạnh AB, AC.

Mọi điểm trên đường trung trực của AB thì cách đều hai điểm A, B.



Vậy điểm M cần tìm là giao điểm của đường phân giác và đường trung trực nói trên.

Bài 23 Cho đoạn thẳng AB thuộc nửa mặt phẳng bờ d. Xác định điểm M thuộc d sao cho điểm M cách đều hai điểm A, B.



Giải

Vẽ trung trực xy của đoạn thẳng AB

Giả sử xy cắt d tại điểm M, ta có:

MA = MB

+ Nếu AB ⊥ d thì xy // d ta không xác định được M.

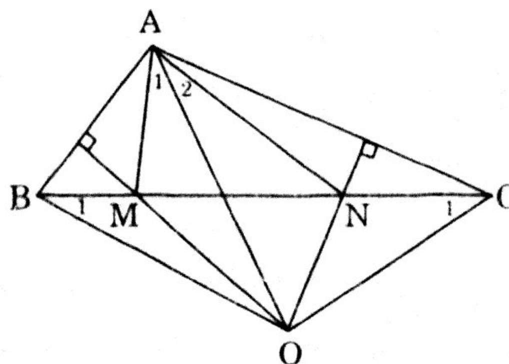
+ Ngoài trường hợp AB ⊥ d luôn luôn xác định được điểm M, và M là điểm duy nhất.

Bài 24 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^0$. các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng:

a) OB = OC

b) AO là tia phân giác của $\widehat{MAN}$.

Giải



a) Ta có:

O nằm trên đường trung trực của AB nên:

OA = AB (1)

O nằm trên trung trực của AC nên:

OA = OC (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: OB = OC

b) Ta có M nằm trên đường trung trực của AB nên MA = MB.

Xét Δ OAM và Δ OBM có:

MA = MB (cmt)

OA = OB (cmt)

OM cạnh chung.

nên Δ OAM = Δ OBM (c.c.c)

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

Tương tự Δ OAN = Δ OCN (c.c.c)

Suy ra $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_1$

Ta lại có OB = OC (theo chứng minh trên)

Nên Δ OBC cân tại O.

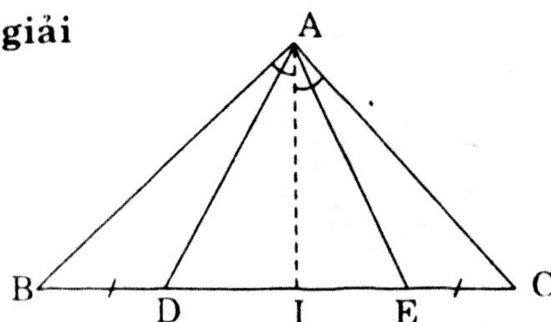
suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$

Vậy $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ hay AO là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

C. Luyện tập

Bài 25 Cho tam giác ABC có AB = AC. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho BD = CE. Chứng minh rằng đường trung trực của BC cũng là đường trung trực của DE.

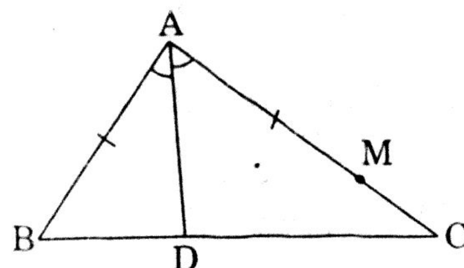
Hướng dẫn giải



Dựng phân giác AI của Δ ABC. Chứng minh AI là đường trung trực của BC và DE.

Bài 26 Cho tam giác ABC có AB > AC, đường phân giác AD. Trên AB lấy một điểm M sao cho AM = AC. Chứng minh AD là đường trung trực của MC.

Hướng dẫn giải



Chứng minh Δ AMD = Δ ACD

$\Rightarrow$ DM = DC và AM = AC (gt)

$\Rightarrow$ AD là đường trung trực của MC.

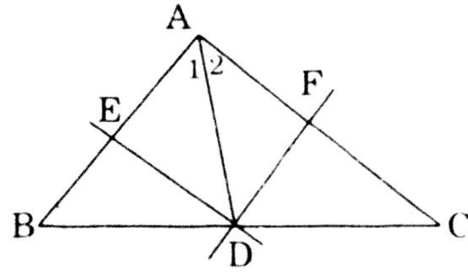
Bài 27 Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại D. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Δ BED = Δ AED (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}$

Tương tự $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$



$\widehat{ADB} = 180^0 - (\widehat{A}_1 + \widehat{B})$

$= 180^0 - \widehat{2}\ A_1$

$\widehat{ADC} = 180^0 - (\widehat{A}_2 + \widehat{C})$

$= 180^0 - \widehat{2}\ A_2$

$\Rightarrow \widehat{ADB}$ và $\widehat{ADC} = 180^0$ hay B, D, C thẳng hàng

Bài 28 Cho tam giác ABC cân tại A. vẽ trung trực của AB cắt AB tại H và cắt BC tại N. Vẽ trung trực của AC cắt AC tại K và cắt BC tại M, gọi I là giao điểm của NH và MK. Chứng minh rằng:

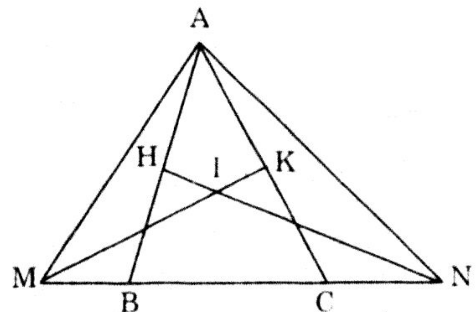
a) MA = NA

b) AI là trung trực của BC.

Hướng dẫn giải

a) Δ NAB cân suy ra $\widehat{HAN} = \widehat{HBC}$

Δ MAC cân.



suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{KCM} = \widehat{HBC}$

Δ AMK = Δ ANH

vì $\widehat{KAM} = \widehat{HAN}$;

AK = AH;

$\widehat{AKM} = \widehat{AHN}$

$\Rightarrow$ AM = AN (chứng minh trên) (1)

Δ IMN cân tại I

$\Rightarrow$ IM = IN (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

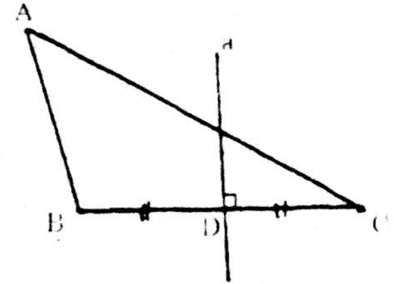
§8. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

1. Đường trung trực của tam giác:

Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

a là đường trung trực ứng với cạnh BC của Δ ABC.



Nhận xét: Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.

2. Tính chất ba đường trung trực của tam giác.

Định lý: Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Δ ABC

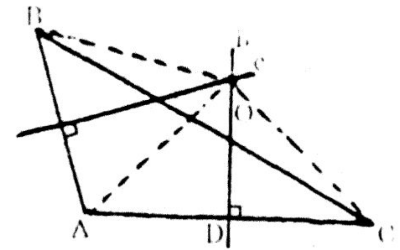
b là đường trung trực của AC

c là đường trung trực của AB

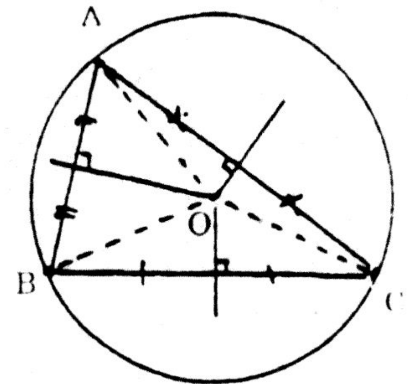
b và c cắt nhau tại O

⇒ O nằm trên đường trung trực của BC

OA = OB = OC



Chú ý: Vì giao điểm O của đường trung trực của tam giác ABC cách đều ba đỉnh của tam giác đó nên có một đường tròn tâm O đi qua ba đỉnh A,B,C. Ta gọi đường tròn đó là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



B. Các bài toán

Bài 25 Xác định dạng của tam giác có giao điểm các phân giác trùng với giao điểm các đường trung trực.

Giải

Gọi O là giao điểm các phân giác của Δ ABC thì ta có:

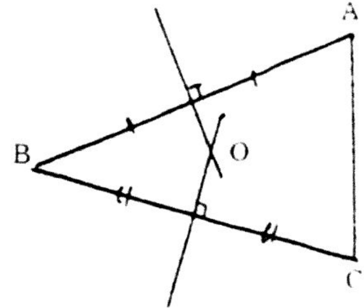
$\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$; $\widehat{OBA} = \widehat{OBC}$; $\widehat{OCA} = \widehat{OCB}$. Nhưng O cũng là giao điểm của các đường trung trực nên OA = OB = OC.

Do đó $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$; $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$.

Từ đó suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. Nên Δ ABC đều

Bài 26 Cho tam giác ABC. Tìm một điểm O cách đều ba đỉnh A, B, C.

Giải



Điểm O cách đều hai điểm A,B nên suy ra điểm O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB.

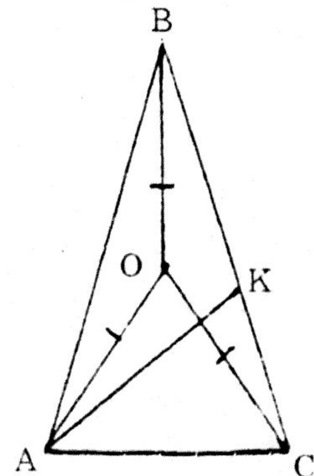
Điểm O cách đều hai điểm B,C nên O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Điểm O cách đều ba điểm A, B, C nên suy ra O là giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC.

Bài 27 Cho tam giác ABC và đường phân giác AK của góc A. Biết rằng giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABK trùng với giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC. Tìm số đo các góc của tam giác ABC.

Giải

Gọi O là giao điểm của ba đường phân giác của Δ ABK. Theo đề bài, O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC.



Vậy OA = OB = OC và các tam giác AOB, BOC, COA đều là tam giác cân đỉnh O.

Gọi $\widehat{OAB}$ = a thì $\widehat{ABC}$ = 2a và $\widehat{KAB}$ = 2a. Vì AK là đường phân giác của góc BAC nên nếu $\widehat{KAB}$ = 2a thì $\widehat{BAC}$ = 4a

Ta có:

Δ AOB = Δ COB nên suy ra AB = CB.

Vậy Δ ABC là tam giác cân ở đỉnh B.

Suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$.

Ta đã biết tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0.

Từ đó: $2a + 4a + 4a = 180^0 \Rightarrow 10a = 180^0$

Vậy số đo các góc của Δ ABC là:

$\widehat{A} = 72^0, \widehat{B} = 36^0, \widehat{C} = 72^0$

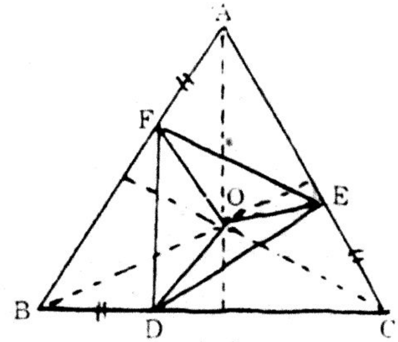
C. Luyện tập

Bài 29 Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho BD = CE = AF. Chứng minh rằng:

a) Δ AEF đều.

b) Các đường trung trực của ΔABC và ΔDEF cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn giải



a) Δ AEF = Δ BFD = Δ CDE

b) Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của Δ ABC.

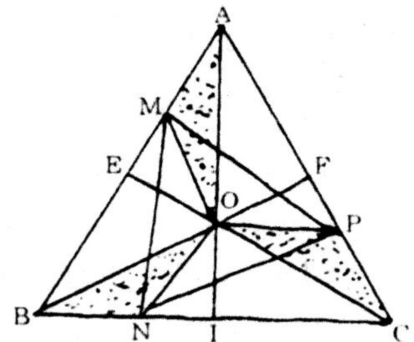
Δ AOF = Δ BOD = ΔCOE

$\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 30 Trên ba cạnh AB, BC < CA của tam giác đều ABC lấy các điểm M, N, P sao cho AM = BN = CP. Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác MNP.

Chứng minh O cũng là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác MNP.

Hướng dẫn giải



Vì O là giao điểm của ba đường trung trực của Δ ABC nên:

OA = OB = OC

$\widehat{MAO} = \widehat{NBO} = \widehat{PCO} = 30^0$

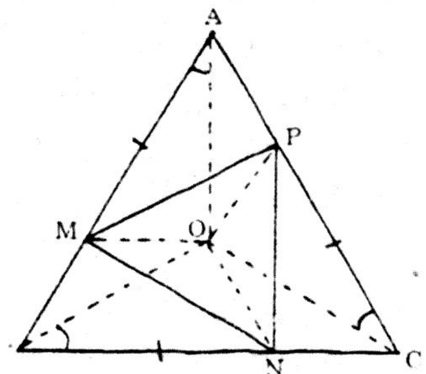
Từ đó Δ MAO = Δ NBO = Δ PCO

$\Rightarrow$ OM = ON = OP

Vậy O là giao điểm các đường trung trực của Δ MNP.

Bài 31 Trên ba cạnh AB, BC và CA của tam giác đều ABC. Lấy các điểm theo thứ tự M, N, P sao cho AM = BN = CP. Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh O cũng là giao điểm ba đường trung trực của tam giác MNP.

Hướng dẫn giải



OA = OB = OC (gt)

$\Rightarrow$ Các tam giác AOM, BON và COP có: AM = BN = CP (gt)

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 30^0$ (vì ABC là tam giác đều nên đường trung trực cũng là đường phân giác).

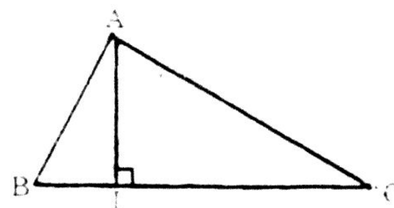
Và OA = OB = OC

$\Rightarrow$ Δ AOM = Δ BON = Δ COP (c.g.c)

$\Rightarrow$ OM = ON = OP $\Rightarrow$ đpcm.

§9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cơ bản cần nhớ

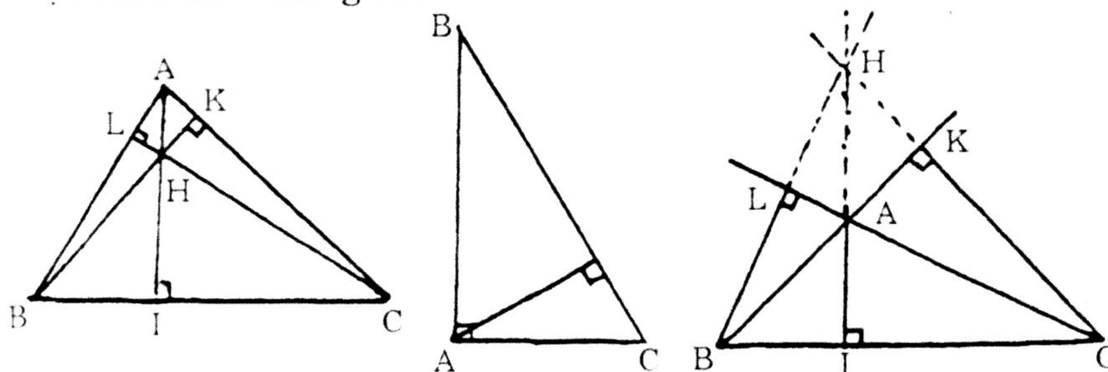


1. Đường cao của tam giác:

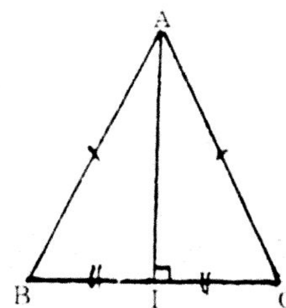
Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó:

2. Tính chất ba đường cao của tam giác

Định lý: Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm, gọi là trực tâm của tam giác.



3. Tính chất về các đường trong tam giác cân:



Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy, đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

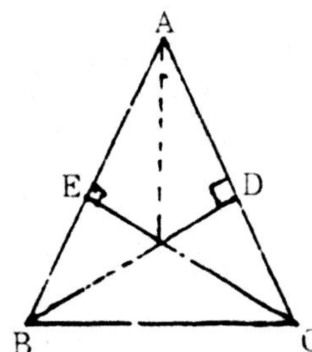
* Đặc biệt trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

C. Các bài toán

Bài 28 Cho tam giác ABC cân (AB = AC). Vẽ hai đường cao BD và CE gặp nhau tại O. Chứng minh:

a) BD = CE; b) AO ⊥ BC

Giải



a) Δ ABD và Δ ACE vuông có AB = AC (gt)

A chung; $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$

Vậy Δ ABD = Δ ACE (cạnh huyền, góc nhọn)

Suy ra BD = CE

b) Δ AOE và Δ AOD vuông có OA chung;

AE = AD (cặp cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau ở câu a)

$\widehat{E} = \widehat{D} = 90^0$

Vậy Δ AOE = Δ AOD (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{EAO} = \widehat{DAO}$

Tia AO là tia phân giác của góc ở đỉnh của tam giác cân nên nó phải vuông với góc đáy BC. Vậy AO $\perp$ BC.

Bài 29 Cho góc $\widehat{xAy} = 60^0$, phân góc Az. Từ điểm B trên AX, vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Vẽ BH $\perp$ Ay.

CM $\perp$ Ay và BK $\perp$ AC. Chứng minh rằng:

a) K là trung điểm của AC

b) $BH = \frac{1}{2}AC$

c) Tam giác KCM là tam giác đều.

Giải

a) Ta có $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_2$ (góc so le trong)

mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (gt) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$

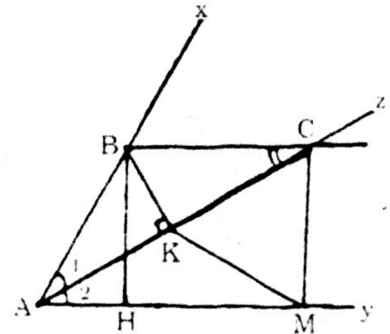
Do đó tam giác ABC cân tại B mà BK là đường cao nên cũng là đường trung tuyến hay KA = KC.

b) Ta có: BH $\perp$ Ay và CM $\perp$ Ay (theo giả thiết) $\Rightarrow$ BH // CM

mặt khác BC // Ay nên ta có:

BH = CM (đoạn thẳng song song)

Trong tam vuông AMC có $\widehat{A}_2 = 30^0$



(Vì Az là phân giác của $\widehat{xAy}$) nên là nửa tam giác đều hay $CM = \frac{CA}{2} \Rightarrow BH = \frac{CA}{2}$

c) Vì K là trung điểm của AC (Chứng minh trên)

Do đó: $KC = CM\ (= \frac{CA}{2})$ (1)

Mặt khác, trong tam giác vuông AMC có $\widehat{A}_2 = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = 60^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Δ KCM đều.

Bài 30 Cho đường thẳng x'x và một điểm O nằm trên đường thẳng ấy. Dựng tia Oy vuông góc với x'x. Trên tia Oy lấy hai điểm A và B nào đó sao cho A nằm giữa O và B, trên tia Ox lấy một điểm C nào đó. Gọi D là hình chiếu của A trên đường thẳng BC

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng x'x và AD cắt nhau tại điểm E.

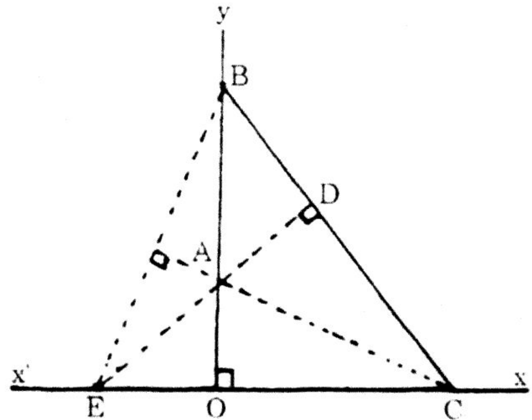
b) Chứng minh: AC ⊥ BE

c) Chứng minh rằng hai góc $\widehat{BAE}$ và $\widehat{BCE}$ bằng nhau (tổng số đo bằng 180^0).

Giải

a) Hai đường thẳng AD và x'x phân biệt. Giả sử AD // x'x. Vì AD ⊥ BC nên x'x ⊥ BC. Như vậy qua điểm B có hai đường thẳng BO và BC cùng vuông góc với x'x, vô lý.

Từ đó, AD không song song với x'x nên AD cắt x'x tại điểm E.



b) Xét Δ BCE, hai đường cao BO và ED cắt nhau tại điểm A nên A là trực tâm của Δ BCE. Đường cao xuất phát từ đỉnh C đi qua A hay AC ⊥ BE.

c) Xét tam giác vuông AOC, ta có:

$\widehat{OAC} + \widehat{OCA} = 90^0$ (1)

Xét tam giác ADC, ta có:

$\widehat{CAD} + \widehat{ACD} = 90^0$ (2)

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được:

$\widehat{OAC} + \widehat{ACD} + \widehat{OCA} = \widehat{ACD} = 180^0$

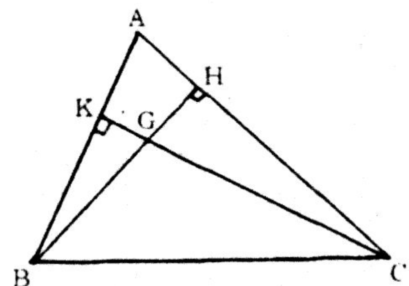
$\Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{OCD} = 180^0$

Vì $\widehat{OAD} = \widehat{BAE}$ còn góc OCD chính là góc BCE nên ta suy ra: $\widehat{BAE} + \widehat{BCE} = 180^0$.

C. Luyện tập

Bài 32 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao BH và CK cắt nhau ở G. Tìm trên hình vẽ có bao nhiêu tam giác. Hãy chỉ rõ các tam giác trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác vuông?

Hướng dẫn giải



Ta thấy có 8 tam giác tạo thành. Đó là:

– Δ ABC, Δ ABH, Δ BHC, Δ BKG

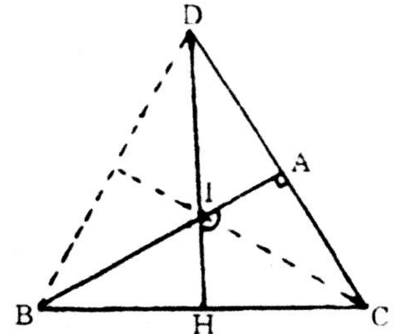
– Δ CGH, Δ CKB, Δ CKA, Δ BGC

trong 8 tam giác trên, có 6 tam giác vuông.

Bài 33 Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB lấy một điểm I và trên cạnh BC lấy một điểm H sao cho:

$\widehat{AIH} + \widehat{ACH} = 180^0$. Đường thẳng IH cắt đường thẳng AC tại D. Chứng minh rằng hai đường thẳng BD và CI vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

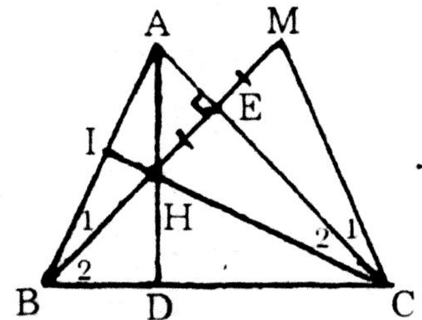


Hãy chứng minh $\widehat{BIH} = \widehat{ACH}$

từ đó ta suy ra Δ HBI vuông tại H. Như vậy I là trực tâm của tam giác DBC, do đó CI ⊥ BD.

Bài 34 Cho tam giác ABC, hai đường cao AD, BE gặp nhau tại H. Vẽ điểm M sao cho AC là đường trung trực của HM. Chứng minh rằng $\widehat{HBA} = \widehat{ACM}$

Hướng dẫn giải



Δ CHM cân nên $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

H là trực tâm của Δ ABC nên CH ⊥ AB, do đó $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$ (cùng phụ với góc A).

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (Vì cùng bằng với $\widehat{C_2}$).

Bài 35 Cho tam giác ABC vuông góc ở C và đường cao CD vẽ từ đỉnh góc vuông đến cạnh huyền AB. Các tia phân giác của các góc ACD và BCD cắt cạnh huyền theo thứ tự ở E và F. Gọi I là điểm cách đều ba cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng I cách đều ba đỉnh của tam giác ECF.

Hướng dẫn giải

I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC. AI và BI là các đường trung trực của các cạnh CF và CE.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I
SỐ HỮU TỈ - SỐ THỰC

Chương II
HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chương III
THỐNG KÊ

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chương II

TAM GIÁC

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC – CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập : NGUYỄN THÚY

Sửa bài : TRẦN VĂN THẮNG

Chế bản : TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa : QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

KIẾN THỨC CƠ BẢN TOÁN 7

Mã số: 1L-166ĐH2008

In 5.000 cuốn, khổ 16x24 cm tại Xí nghiệp In Tân Bình.

Số xuất bản: 394-2008/CXB/12-71/ĐHQGHN, ngày 07/05/2008

Quyết định xuất bản số 166 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2008.